УДК 517.977

И.М. Борковская, доц. (БГТУ, г. Минск)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Одним из направлений современной прикладной математики является теория управления. При изучении математических моделей динамических процессов в качественной теории управления часто возникает вопрос построения такой обратной связи, которая бы обеспечивала замкнутой системе желаемые свойства. Важнейшим из таких свойств является свойство устойчивости системы управления. Задача построения обратной связи, которая бы делала замкнутую систему устойчивой (в частности, асимптотически устойчивой), называется задачей стабилизации, а регулятор, решающий эту задачу – стабилизирующим регулятором. В настоящее время особую актуальность приобрело исследование математических моделей динамических процессов, в природе которых есть «неоднородность». Получаемые при этом динамические системы часто называют гибридными. Изучение гибридных систем, несмотря на их сложность, представляет актуальную проблему теории управления. Среди гибридных систем выделяют так называемые системы с «многомерным временем», содержащие непрерывную и дискретную компоненты.

Рассмотрим гибридную дискретно-непрерывную систему с «многомерным» (2-D-мерным) временем:

$$\dot{x}_1(t,k) = A_{11}x_1(t,k) + A_{12}x_2(t,k) + B_1u(t,k),\ t \in [0,+\infty), \tag{1}$$

$$x_2(t,k+1) = A_{21}x_1(t,k) + A_{22}x_2(t,k) + B_2u(t,k),\ k = 0,1,2,\ldots \tag{2}$$

где $\dot{x}_1(t,k) = \dfrac{\partial x_1(t,k)}{\partial t}$, с граничными (начальными) условиями

$$x_1(0,k) = x_1(k),\ k = 0,1,2,...;\quad x_2(t,0) = x_2(t), t \in [0,+\infty).$$

Здесь $x_1(t,k) \in R^{n_1}$, $x_2(t,k) \in R^{n_2}$ – векторы состояния системы; $u(t,k) \in R^r$ – вектор управляющего воздействия, $t \geq 0, k = 0,1,2,\ldots$; $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – постоянные матрицы.

Систему (при выключенном управлении: $B_1 = B_2 = 0$) назовем:

1) сильно асимптотически устойчивой, если найдутся такие действительные числа $M > 0$, $\alpha > 0$, $0 < \gamma < 1$, что для любых ограниченных начальных функций решение системы (1), (2) обладает следующим свойством, определяемым неравенством (3).

$$\|x_1(t,k)\| + \|x_2(t,k)\| \le M\left(e^{-\alpha t} + |\gamma|^k\right), \quad t > 0, k = 1, 2, ...; \qquad (3)$$

где символ $\|d\|$ обозначает норму (евклидову) вектора d;

2) (α,γ)-устойчивой, если найдется такое действительное число $M > 0$, что для любых ограниченных начальных функций соответствующее решение системы удовлетворяет требованию (3).

Для скалярного случая, когда система принимает вид

$$\dot{x}_1(t,k) = a_{11}x_1(t,k) + a_{12}x_2(t,k) + b_1u(t,k),\ t \in [0,+\infty), \qquad (4)$$

$$x_2(t,k+1) = a_{21}x_1(t,k) + a_{22}x_2(t,k) + b_2u(t,k),\ k = 0,1,2,\ldots \qquad (5)$$

верны следующие условия устойчивости:

Теорема 1. Для того, чтобы система (4), (5) была сильно асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) $a_{12}a_{21} = 0$; 2) $|a_{22}| < 1, \quad a_{11} < 0.$

Действительно, характеристическое уравнение системы имеет вид: $\det\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mu - a_{22} \end{bmatrix} = (\lambda - a_{11})(\mu - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0,$ откуда $\mu = a_{22} + \dfrac{a_{12}a_{21}}{\lambda - a_{11}}$ и с учетом необходимого условия $\mathrm{Re}\lambda < 0$ и $|\mu| < 1$ заключаем, что система сильно асимптотически устойчива, когда, во-первых, $a_{12}a_{21} = 0$, во-вторых, $|a_{22}| < 1, \quad a_{11} < 0.$

Можно показать, что эти условия является и достаточными.

Теорема 2. Для того, чтобы система (4), (5) была (α,γ)-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) $a_{12}a_{21} = 0$; 2) $a_{11} \le -\alpha, \quad |a_{22}| < \gamma.$

Присоединим к системе регулятор, не выводящий ее за пределы рассматриваемого класса:

$$u(t,k) = q_1x_1(t,k) + q_2x_2(t,k). \qquad (6)$$

Замкнутая система уравнений (4), (5), (6) имеет вид:

$$\dot{x}_1(t,k) = (a_{11} + b_1q_1)x_1(t,k) + (a_{12} + b_1q_2)x_2(t,k),$$
$$x_2(t,k+1) = (a_{21} + b_2q_1)x_1(t,k) + (a_{22} + b_2q_2)x_2(t,k).$$

Систему (4), (5) назовем стабилизируемой в смысле сильной асимптотической устойчивости ((α,γ)-устойчивости) регулятором (6), если найдутся такие числа q_1, q_2 из (6), что замкнутая система (4), (5), (6) является сильно асимптотически устойчивой ((α,γ)-устойчивой).

Для выполнения первого условия теоремы 1 возможны следующие способы выбора коэффициентов регулятора (6):

$$1)\ q_2 = -\frac{a_{12}}{b_1}; \qquad 2)\ q_1 = -\frac{a_{21}}{b_2}.$$

Тогда в первом случае при условии $\left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < 1$ коэффициент q_1 можно выбрать следующим образом:

$$\text{при } b_1 > 0: \quad q_1 < -\frac{a_{11}}{b_1}, \quad \text{при } b_1 < 0: \quad q_1 > -\frac{a_{11}}{b_1}.$$

Во втором случае при условии $a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0$ коэффициент q_2 будем выбирать так, чтобы $|a_{22} + b_2 q_2| < 1$.

Теорема 3. Для того, чтобы система (4), (5) была стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (6), достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий: 1) $\left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < 1$; 2) $a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0$.

Рассмотрим теперь условия стабилизируемости в смысле (α, γ)-устойчивости. Используем теорему 2. Если $q_2 = -\frac{a_{12}}{b_1}$, то при $\left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < \gamma$ и выборе $q_1 \le \frac{-\alpha - a_{11}}{b_1}$ при $b_1 > 0$, $q_1 \ge \frac{-\alpha - a_{11}}{b_1}$ при $b_1 < 0$, получаем (α, γ)-устойчивую систему. При $q_1 = -\frac{a_{21}}{b_2}$ условием устойчивости будет выполнение неравенства $a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} \le -\alpha$.

Теорема 4. Для того, чтобы система (4), (5) была стабилизируема (в смысле (α, γ)-устойчивости) регулятором (6), достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$1)\ \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < \gamma; \quad 2)\ a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} \le -\alpha.$$

Сформулированные достаточные условия позволяют выделить системы, для которых возможно построение регулятора вида (6), обеспечивающего системе свойство сильной асимптотической устойчивости (либо (α, γ)-устойчивости).