УДК 517.977

А.А. Якименко, доц. (БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ О МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ С ТРЕМЯ СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и тремя соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=0}^{3}A_j x(t-jh)+bu(t), \tag{1}$$

где $A_j,\ j=0,1,2,3$ – постоянные (2×2)-матрицы; $h>0$ – постоянное запаздывание; b – постоянный 2-вектор; u – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что $b'=(0\ 1)$ (штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\det\left[\lambda I_2-A_0-A_1e^{-\lambda h}-A_2e^{-2\lambda h}-A_3e^{-3\lambda h}\right]\equiv$$
$$\equiv\lambda^2+\left(\alpha_{10}+\alpha_{11}e^{-\lambda h}+\alpha_{12}e^{-2\lambda h}+\alpha_{13}e^{-3h}\right)\lambda+$$
$$+\alpha_{00}+\alpha_{01}e^{-\lambda h}+\alpha_{02}e^{-2\lambda h}+\alpha_{03}e^{-3\lambda h}+\ \alpha_{04}e^{-4\lambda h}+\alpha_{05}e^{-5\lambda h}+\alpha_{06}e^{-6\lambda h}=0 \tag{2}$$

где $\lambda\in\mathbb{C},\ e^{-j\lambda h}$ – оператор сдвига ($e^{-j\lambda h}x(t)\equiv x(t-jh)$).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t)=\sum_{j=0}^{M}q_j'x(t-jh)+\int_{-lh}^{0}g'(s)x(t+s)ds, \tag{3}$$

где $l, M\in\mathbb{N},\ q_j,\ j=0,1,\ldots,M$ – 2-векторы; $g(s),\ \ s\in[-h,\ 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция.

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda)=\sum_{j=0}^{M}q_j'e^{-j\lambda h}+G(\lambda), \tag{4}$$

где $G(\lambda)$ – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij},\ i=0,\ j=\overline{0,6};\ \ i=1,$ $j=0,1,2,3$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (ср. с формулой (2)):

$$\det\left[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h} - A_3 e^{-3\lambda h} - bU(\lambda)\right] \equiv$$
$$\equiv \lambda^2 + \left(\tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{12} e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{13} e^{-3h}\right)\lambda +$$
$$+ \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{02} e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{03} e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{04} e^{-4\lambda h} + \tilde{\alpha}_{05} e^{-5\lambda h} + \tilde{\alpha}_{06} e^{-6\lambda h} = 0.$$

Пусть

$$\mu_1 = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} m + \tilde{\alpha}_{12} m^2 + \tilde{\alpha}_{13} m^3; \qquad (5)$$

$$\mu_2 = \sum_{j=0}^{6} \tilde{\alpha}_{0j} m^j, \qquad (6)$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0$, $j = \overline{0, 6}$; $i = 1$, $j = 0, 1, 2, 3$ – произвольные числа. Тогда система (1), замкнутая регулятором, решающим задачу модального управления, имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0. \qquad (7)$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига $(mx(t) = x(t-h))$, $A(m) = A_0 + A_1 m + A_2 m^2 + A_3 m^3$. Не ограничивая общности, можно считать, что матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 m + a_2 m^2 & b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$a_{21}(m) = a_{210} + a_{211} m + a_{212} m^2 + a_{213} m^3;$$
$$a_{22}(m) = a_{220} + a_{221} m + a_{222} m^2 + a_{223} m^3. \qquad (8)$$

В данном докладе рассмотрим случай

$$a_1 = a_2 = 0. \qquad (9)$$

Тогда матрица $A(m)$ примет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix}.$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, будем искать в виде

$$U(\lambda, m) = \left[u_1(\lambda, m) \quad u_2(\lambda, m)\right] =$$
$$= \left[\eta_{11}(m) - a_{21}(m) \quad \eta_2(\lambda, m) - a_{22}(m)\right], \qquad (10)$$

где $\eta_{11}(m)$ – полином относительно m.

Компоненту $\eta_2(\lambda, m)$ регулятора (10) разделим на дифференциально-разностную (ей соответствует некоторый квазиполином) и интегральную части:

$$\eta_2(\lambda, m) = \eta_{21}(m) + \eta_{22}(\lambda, m), \tag{11}$$

где $\eta_{21}(m)$ – полином относительно m; $\eta_{22}(\lambda, m)$ соответствует интегральной части. Будем искать эту функцию в следующем виде:

$$\eta_{22}(\lambda, m) = \left(c_1 + c_2 m + c_3 m^2\right)\frac{m-k}{\lambda - a_0},$$

где $k = e^{-a_0 h}$; c_1, c_2, c_3 – некоторые числа, подлежащие определению. Характеристическое уравнение замкнутой регулятором (10) системы (1) примет вид

$$\begin{vmatrix} a_0 - \lambda & b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3 \\ \eta_{11} & \eta_{21} + \left(c_1 + c_2 m + c_3 m^2\right)\dfrac{m-k}{\lambda - a_0} - \lambda \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \lambda^2 + \left(-a_0 - \eta_{21}\right)\lambda - \eta_{11} m^3 - b_1 \eta_{11} m - b_2 \eta_{11} m^2 +$$
$$+ c_2 k m - c_2 m^2 + c_3 m^2 k - c_3 m^3 + \eta_{21} a_0 - b_0 \eta_{11} + c_1 k - c_1 m = 0.$$

Чтобы получить для замкнутой системы характеристическое уравнение (7), выберем в качестве η_{21} следующий квазиполином:

$$\eta_{21} = -a_0 - \mu_1,$$

где μ_1 определен в формуле (5).

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda - \eta_{11} m^3 - b_2 \eta_{11} m^2 + c_2 k m - c_2 m^2 - a_0^2 +$$
$$+ c_3 m^2 k - c_3 m^3 - \mu_1 a_0 - b_0 \eta_{11} + c_1 k - c_1 m = 0.$$

Чтобы последнее уравнение имело вид (7), нужно выполнение равенства

$$-\eta_{11} m^3 - b_2 \eta_{11} m^2 + c_2 k m - c_2 m^2 - a_0^2 + c_3 m^2 k - c_3 m^3 - \mu_1 a_0 - b_0 \eta_{11} + c_1 k - c_1 m = \mu_2.$$

Выразив отсюда η_{11}, получим

$$\eta_{11} = \frac{-\mu_2 + c_2 k m - c_2 m^2 + c_3 m^2 k}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3} + \frac{-c_3 m^3 - a_0^2 - \mu_1 a_0 + c_1 k - c_1 m}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3}. \tag{12}$$

Последняя дробь, в общем случае, не является полиномом относительно m. Подберем c_1, c_2 и c_3 так, чтобы правая часть формулы (12) стала полиномом. Для этого вначале выделим целую часть в (12).

$$\eta_{11} = -c_3 + \frac{b_2 c_3 m^2 + c_3 m^2 k + b_1 c_3 m + c_2 k m - c_2 m^2 - a_0^2}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3} + \frac{-\mu_1 a_0 + b_0 c_3 + c_1 k - c_1 m - \mu_2}{b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + m^3}.$$

Потребуем, чтобы числитель последней дроби был бы равен нулю. Имеем:

$$b_2 c_3 m^2 + c_3 m^2 k + b_1 c_3 m + c_2 k m - c_2 m^2 - a_0^2 - \mu_1 a_0 + b_0 c_3 + c_1 k - c_1 m - \mu_2 \equiv$$

$$\equiv \left(b_2c_3 + c_3k - c_2\right)m^2 + \left(b_1c_3 + c_2k - c_1\right)m - a_0^2 - \mu_1 a_0 + b_0c_3 + c_1k - \mu_2 = 0.$$

Отсюда видно, что в качестве c_2 можно взять

$$c_2 = b_2c_3 + c_3k, \tag{13}$$

а в качестве c_1 возьмем

$$c_1 = b_1c_3 + c_2k. \tag{14}$$

Тогда с учетом соотношений (13), (14)

$$b_2c_3m^2 + c_3m^2k + b_1c_3m + c_2km - c_2m^2 - a_0^2 - \mu_1 a_0 + b_0c_3 + c_1k - c_1m - \mu_2 \equiv$$

$$\equiv \left(b_0 + b_1k + b_2k^2 + k^3\right)c_2 - a_0^2 - a_0\mu_1 - \mu_2 = 0.$$

Отсюда

$$c_2 = \frac{a_0^2 + a_0\mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1k + b_2k^2 + k^3}. \tag{15}$$

Нетрудно увидеть, что для того, чтобы c_2 из формулы (15) было бы полиномом относительно m, необходимо и достаточно выполнения условия

$$b_0 + b_1k + b_2k^2 + k^3 \neq 0. \tag{16}$$

С учетом того, что

$$\eta_{22}\left(\lambda, m\right) = \left(c_1 + c_2m + c_3m^2\right)\frac{m-k}{\lambda - a_0},$$

и принимая во внимание (13), (14), (15) после несложных преобразований получим

$$\eta_{22}\left(\lambda, m\right) = \frac{\left(a_0^2 + \mu_1 a_0 + \mu_2\right)}{b_0 + b_1k + b_2k^2 + k^3} \times \frac{\left(b_2k + mb_2 + k^2 + km + m^2 + b_1\right)\left(m-k\right)}{\lambda - a_0}.$$

Таким образом, с учетом (10) регуляторы в частотной области

$$u_1\left(\lambda, m\right) = -\frac{a_0^2 + a_0\mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1k + b_2k^2 + k^3} - a_{21}\left(m\right); \tag{17}$$

$$u_2\left(\lambda, m\right) = -a_0 - \mu_1 - a_{22}\left(m\right) + \frac{\left(a_0^2 + \mu_1 a_0 + \mu_2\right)}{b_0 + b_1k + b_2k^2 + k^3} \times$$

$$\times \frac{\left(b_2k + mb_2 + k^2 + km + m^2 + b_1\right)\left(m-k\right)}{\lambda - a_0}. \tag{18}$$

решают задачу модального управления для системы (1) при выполнении условия (16). Отсюда видна справедливость следующей теоремы.

Теорема. Для того чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (3) в случае (9), необходимо и достаточно выполнения условия (16). При этом регуляторы, решающие задачу модального управления, в частотной области имеют вид (17), (18).