ЛИТЕРАТУРА

1. Винявский, А.А. Industrial Internet of Things: риски и защита в цифровую эпоху / А.А. Винявский // Автоматизация в промышленности. – 2024. – № 9. – С. 57-60.

2. Евдокимова, С.А. Проблемы безопасности промышленного интернета вещей / С.А. Евдокимова // Актуальные проблемы автоматизации, роботизации и управления в технических, организационных, экономических системах : сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции преподавателей и специалистов и Всероссийской научно-практической конференции студентов и молодых ученых. – Воронеж, 2025. – С. 62-68.

3. Cindrić, I. Mapping of Industrial IoT to IEC 62443 Standards / I. Cindrić, M. Jurčević, T. Hadjina // Sensors. – 2025. – Vol. 25(3). – S. 728. – DOI: 10.3390/s25030728.

4. NVD – Home. National Vulnerability Database. – URL: https://nvd.nist.gov/(дата обращения: 18.01.2026).

5. CVE: Common Vulnerabilities and Exposures. – URL: https://cve.mitre.org/ (дата обращения: 18.01.2026).

УДК 517.925

Р. Пренов;

Р. Мамедсалиев

(Туркменский государственный университет имени Магтымгулы, г. Ашхабад);

(Туркменский инженерно-технологический университет имени Огуз Хана, г. Ашхабад, Туркменистан)

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе рассматривается нелокальная начально-краевая задача для системы гиперболических уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a(x)\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \delta u(t,x) + b(t,x)v(t,x) + f_1(t,x),\ 0 < t \le T,\ 0 < x < l, \\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} = -a(x)\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x} - \delta v(t,x) + f_2(t,x),\ 0 < t \le T,\ 0 < x < l, \\ u(t,0) = u(t,l), \qquad v(t,0) = v(t,l), \qquad 0 \le t \le T, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad v(0,x) = v_0(x), \qquad 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь

$a(x) \ge a > 0,\ f_1(t,x), f_2(t,x),\ u_0(x), v_0(x),\ b(t,x),\ \delta > 0,\ ((t,x) \in [0,T]\times[0,l])$

непрерывные функции согласуется совокупности переменных быть гладким решением задача (1).

Задача (1) может пользоваться по газовой динамике, акустики, распространении электромагнитных волн, гидродинамики и др.[5].

Теорема 1. Для решения системы (1) справедлива оценка устойчивости [1-2]

$$\max_{0<t<T}\|u\|_{C[0,l]} + \max_{0<t<T}\|v\|_{C[0,l]} \le M[\|u_0\|_{C[0,l]} + \|v_0\|_{C[0,l]} + \\ + \max_{0<t<T}\|f_1\|_{C[0,l]} + \max_{0<t<T}\|f_2\|_{C[0,l]}]$$

Здесь M -не зависит u_0, v_0, f_1, f_2 .

Доказательство. Для доказательство теоремы опирается свойства позитивности линейного оператора. Поэтому задача (1) напишем в операторном виде. Дадим область определения оператора

$$D(A) = \begin{Bmatrix} (u,v):\ u \in C^1[0,l], v \in C^1[0,l], \\ u(0) = \gamma u(l), \quad \beta v(0) = v(l), \quad 0 \le x \le l \end{Bmatrix} \tag{2}$$

$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aB & -1 \\ 0 & aB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{3}$$

Здесь $$Bu = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\ \ u(0) = \gamma u(l), \quad 0 \le x \le l,$$

$$Bv = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x},\ \ \beta v(0) = v(l), \quad 0 \le x \le l,$$

Тогда задача (1) приводится в следущий вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a(x)Bu - v(x,t) + f_1(x,t), \ \ 0 < x < l,\ \ 0 < t \le T, \\ \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -a(x)Bv + f_1(x,t),\ \ 0 < x < l, \qquad 0 < t \le T, \\ u(0,t) = \gamma u(l,t), \qquad \beta v(0,t) = v(l,t),\ \ 0 \le t \le T, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = v_0(x), \qquad 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{4}$$

Для конкретности доказательство теорема 1. вводим следующих векторных функции

$$\left\{\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\right\}, \qquad \begin{pmatrix} u(0) = \gamma u(l) \\ \beta v(0) = v(l) \end{pmatrix},$$

и нормы $[0,l]\times[0,l]$ в прямоугольнике:

$$\left\|\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\right\|_{C[0,l]\times C[0,l]} = \max_{0\le x\le l}|\varphi| + \max_{0\le x\le l}|\psi|,$$

$$\left\|\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\right\|_{C^\alpha[0,l]\times C^\alpha[0,l]} = \left\|\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\right\|_{C[0,l]\times C[0,l]} + \\ + \sup_{\substack{1\le s<x+s\le l \\ x\ne s}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(s)|}{(x-s)^\alpha} + \sup_{\substack{1\le s<x+s\le l \\ x\ne s}} \frac{|\psi(x) - \psi(s)|}{(x-s)^\alpha}$$

$$C[0,l] = C[0,l] \times C[0,l], \quad C^\alpha[0,l] = C^\alpha[0,l] \times C^\alpha[0,l], \ (0 < \alpha < 1)$$

Здесь $C^\alpha[0,l] = C^\alpha[0,l] \times C^\alpha[0,l], \ (0 < \alpha < 1)$ пространства непрерывных функций Гёльдера. Задача (1) приводится следующий операторному виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + F, \qquad \begin{pmatrix} u(x,0) \\ v(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix} \tag{5}$$

здесь $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

Teorema 2. Все $\lambda > 0$ являются регулярными точками для резольвенты $(\lambda + A)^{-1}$ оператора (-A) и справедлива оценка

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{C[0,l] \to C[0,l]} \le \frac{M_2}{\lambda + \delta}, \tag{6}$$

Здесь M_1 постоянная не зависящим от λ.

Доказательство. Для доказательство теорем обозначим позитивый оператор

$$(\lambda + A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

Здесь можем взять следующее равенство

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (\lambda + A)^{-1}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

Поэтому воспользуемся формулой для решения системы

$$\begin{cases} a(x)\frac{du}{dx} + \delta u(x) + \lambda u(x) - v(x) = \phi(x), \quad 0 < x < l, \\ -a(x)\frac{dv}{dx} + \delta v(x) + \lambda v(x) = \psi(x), \ 0 < x < l, \\ u(0) = \gamma u(l), \quad \beta v(0) = v(l). \end{cases} \tag{7}$$

Решая система задачи (7) мы можем написать функция Грина

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = (A + \lambda I)^{-1}\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = \int_0^l G(x,s,\lambda)\begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{pmatrix} ds \tag{8}$$

Здесь $G(x,s,\lambda) = \begin{pmatrix} G_{11}(x,s,\lambda) & G_{12}(x,s,\lambda) \\ 0 & G_{22}(x,s,\lambda) \end{pmatrix}$,

$$G_{11}(x,s,\lambda) = P \times \begin{cases} \frac{1}{a(s)} e^{-(\delta+\lambda)\int_s^x \frac{dy}{a(y)}}, & 0 \le s \le x, \\ \frac{\gamma}{a(s)} e^{-(\delta+\lambda)\left(\int_0^s \frac{dy}{a(y)} + \int_s^l \frac{dy}{a(y)}\right)} & , x \le s \le l, \end{cases} \tag{9}$$

$$G_{22}(x,s,\lambda) = Q \begin{cases} \frac{\beta}{a(s)} e^{-(\delta+\lambda)\left(\int_0^s \frac{dy}{a(y)} + \int_s^l \frac{dy}{a(y)}\right)}, & 0 \le s \le x, \\ \frac{1}{a(s)} e^{-(\delta+\lambda)\int_x^s \frac{dy}{a(y)}}, & x \le s \le l, \end{cases} \tag{10}$$

$$G_{12}(x,s,\lambda) = \delta \times \int_0^l G_{11}(x,p,\lambda) G_{22}(p,s,\lambda)\, dp, \tag{11}$$

$$P = \left(1 - \beta \cdot e^{-(\delta+\lambda)\int_0^l \frac{dy}{a(y)}}\right)^{-1}, \qquad Q = \left(1 - \gamma \cdot e^{-(\delta+\lambda)\int_0^l \frac{dy}{a(y)}}\right)^{-1}$$

Получим второе уравнений задача (7):

$$-a(x)\frac{dv}{dx} + \delta v(x) + \lambda v(x) = \psi(x), \qquad 0 < x < l$$

$$v(x) = e^{-(\delta+\lambda)\int_0^l \frac{dy}{a(y)}} v(l) + \int_0^l \frac{1}{a(s)} e^{-(\delta+\lambda)\int_x^s \frac{dy}{a(y)}} \psi(s)ds$$

Полученные оценки используя для решения задачи (7) и неравенство треугольника получим следующий оценки:

$$|u(x)| \le \int_0^l |G_{11}(x,s,\lambda)|ds \max_{0\le s\le l}|\varphi(s)| + \int_0^l |G_{12}(x,p,\lambda)|ds \max_{0\le s\le l}|\psi(s)|$$

$$|v(x)| \le \int_0^l |G_{22}(x,s,\lambda)|ds \max_{0\le s\le l}|\psi(s)|$$

Суммируя полученных оценок можно писать оценка неравенство нормы:

$$\left\|\binom{u}{v}\right\|_{C[0,l]} \le \frac{M}{(\delta+\lambda)}\left\|\binom{\varphi}{\psi}\right\|_{C[0,l]}$$

Здесь M – константа. Полученная оценка обладается устойчивости решения в пространства $C[0,l]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ashyralyev A., Prenov R. The hyperbolic system of equation with nonlocal boundary conditions. //Turkic world mathematical society journal of applied and engineering mathematics journal TWMS, Volume 2. No. 2 2012, pp. 154-178

2. Ashyralyev A., Prenov R. Finite-difference method for the hyperbolic system of equations with nonlocal boundary conditions. // Advances in Difference Equations, Vol. 2014, Article No 26. pp. 2-28.

3. Пренов Р. Структура дробных пространств, устойчивость разностной схемы для гиперболических систем уравнений. //Труды научной конференции: Актуальные проблемы прикладной математики, физики и энергетики, посвященной IV годовщине нейтралитете Туркменистана.- А.: Ылхам, 1999.– с. 62-65.

4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука 1972.