

УДК 622.736:621.926.3

**В.И. Козловский, П.Е. Вайтехович, Д.Н. Боровский, Д.В. Кульша***УО «Белорусский государственный технологический университет», г. Минск, Беларусь***ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРОЦЕССА ПОМОЛА МАТЕРИАЛОВ  
В БИСЕРНЫХ МЕЛЬНИЦАХ**

**Аннотация.** В статье представлены результаты исследования энергоэффективности процесса помола материалов в вертикальной и горизонтальной бисерных мельницах с использованием различных видов роторов. Разработан метод расчета энергозатрат на перемешивание загрузки, использующий зависимость критерия мощности от критерия Рейнольдса, представленную в виде графиков и эмпирических уравнений.

**Ключевые слова:** вертикальная и горизонтальная бисерные мельницы, энергоэффективность, критерий мощности, критерий Рейнольдса.

**V.I. Kozlouskiy, P.E. Vaitekhovich, D.N. Borovskiy, D.V. Kulsha***Belarusian State Technological University, Minsk, Belarus***ENERGY EFFICIENCY OF THE GRINDING PROCESS IN BEAD MILLS**

**Abstract.** This article presents the results of a study on the energy efficiency of grinding materials in vertical and horizontal bead mills using different rotor types. The method using the relationship between the power criterion and the Reynolds criterion for calculating the energy consumption for mixing the feed is developed. The relationship between the power criterion and the Reynolds criterion is presented in the form of graphics and empirical equations.

**Keywords:** vertical and horizontal bead mills, energy efficiency, power criterion, Reynolds criterion.

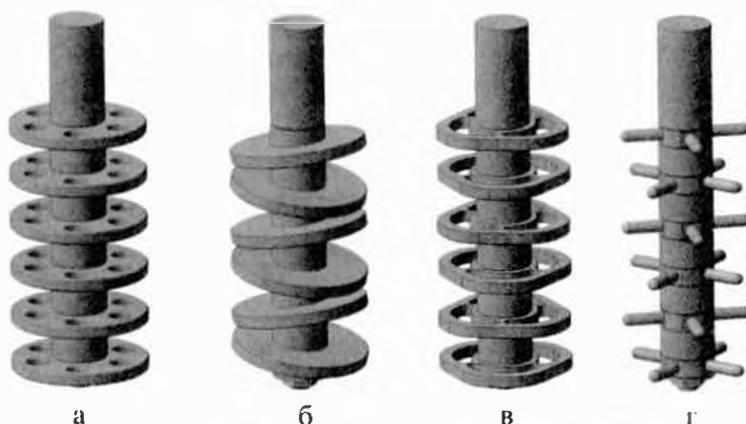
**Введение**

Бисерные мельницы, называемые в зарубежной практике мельницами с мешалками, широко используются во многих отраслях промышленности, особенно в лакокрасочной. Их основное назначение – это сверхтонкий помол (1,0–20,0 мкм) и даже коллоидный (0,1–1,0 мкм) и нанопомол (менее 0,1 мкм). Одна из этих мельниц в горизонтальном исполнении изучена авторами данной работы [1]. Результаты указанной работы подтвердили возможность выхода в зону наноразмеров при мокром помоле в бисерных мельницах.

В дальнейшем возникла необходимость в сравнении различных конструктивных вариантов бисерных мельниц по эффективности и энергозатратам на процессе помола. И эта работа уже начата. На первом этапе изучена кинетика диспергирования и определена эффективность измельчения в восьми конструктивных вариантах бисерных мельниц [2]. Но объективное сравнение, выявление преимуществ той или иной конструкции возможно только по удельным энергозатратам на процесс помола.

**Основная часть**

Преобладающая часть энергозатрат в бисерных мельницах – это мощность, затрачиваемая на вращение мешалок. Причем в качестве объектов исследований энергетики процесса измельчения были выбраны те же, что и при определении его эффективности [2]: два типа бисерных мельниц с четырьмя видами рабочих органов в каждой из них (рисунок 1). Таким образом, исследование и анализ энергетических параметров проводился для восьми конструктивных вариантов бисерных мельниц с идентичными геометрическими, технологическими и скоростными характеристиками.



а – с круглыми дисками; б – с наклонными дисками;  
в – с треугольными дисками; г – со штырями  
Рисунок 1 – Варианты роторов исследуемых мельниц

Диаметр корпусов мельниц составлял 120 мм, роторов 100 мм, а их рабочий объем – 2 л. Для перемешивания загрузки использовались роторы с шестью мешалками соответствующего вида. В качестве измельчающих тел использовались керамические шарики диаметром 2 мм, которые заполняли рабочую камеру на 80–85 %. Измельчаемый материал – мел с размером частиц 0,2–0,5 мм. Для получения суспензии он смешивался с водой в объемном соотношении 1:1. Частота вращения вала составляла 1450 об./мин, что соответствовало линейной скорости по кромкам мешалок около 7,6 м/с.

Работа по изучению энергетики процесса измельчения в бисерных мельницах включала две примерно равнозначные части: экспериментальную и аналитическую.

Экспериментальные исследования заключались в определении мощности привода каждой из мешалок. Она замерялась с помощью ваттметра при варьировании отдельных параметров мельниц.

При сравнении мощности разных конструктивных вариантов мельниц установлено, что энергозатраты процесса измельчения в вертикальных мельницах в среднем на 20 % выше, чем в горизонтальных. Это обусловлено, скорее всего, дополнительным сопротивлением вращения мешалок за счет давления столба высоковязкой жидкой суспензии. Изменением конструкции перемешивающего органа можно варьировать затратами мощности в пределах 10–15 % в горизонтальной мельнице и 20–30 % в вертикальной. Наиболее высокими энергозатратами характеризуются мельницы со штыревым ротором и ротором с наклонными дисками. В первом случае это объясняется тем, что сопротивление жидкости испытывает не только фронтальная плоскость перемешивающего органа, например диска, но и вся поверхность штырей. Во втором случае наклонными дисками осуществляется интенсивное перемешивание и перемещение высоковязкой суспензии как в радиальном, так и в осевом направлении, что, конечно, приводит к увеличению энергозатрат.

Главной задачей аналитической части данной работы являлось создание инженерной методики расчета мощности для каждого из конструктивных вариантов. Но нас даже в большей степени интересовали удельные энергозатраты, по которым можно сравнить их между собой.

Для самого простого перемешивающего органа, представляющего собой сплошные диски, перпендикулярно установленные на валу, использован чисто аналитический метод. Он основан на решении задачи по обтеканию вращающегося диска потоком жидкости [3]. Течение в данном случае осесимметричное и в общем случае описывается уравнениями Навье-Стокса и неразрывности в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases}
 v_z \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_r}{r} \right) - \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right); \\
 v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = v \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) - \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right); \\
 v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_c} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right); \\
 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,
 \end{cases} \quad (1)$$

где  $v_r$ ,  $v_\varphi$ ,  $v_z$  – составляющие скорости в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно, м/с;

$r$  – текущий радиус диска мешалки, м;

$z$  – осевая координата, м;

$\rho_c$  – плотность суспензии, кг/м<sup>3</sup>;

$p$  – давление (скоростной напор), Па;

$\nu$  – кинематическая вязкость среды, м<sup>2</sup>/с.

Введением новых переменных эти уравнения переводятся в систему обычных дифференциальных уравнений второго порядка, которая решается численным методом.

Мы использовали результаты этого решения и получили формулу для расчета мощности [4] указанного выше конструктивного исполнения перемешивающего органа:

$$N = 0,616 \pi \rho_c \omega^2 r^4 k \sqrt{\nu \omega}, \quad (2)$$

где  $N$  – мощность на перемешивание, Вт;

$\omega$  – угловая скорость вращения диска, рад/с;

$k$  – количество дисков.

Расчеты мощности по формуле (2) показали хорошую сходимость с экспериментальными данными.

Однако дальнейший анализ конструктивных особенностей всех используемых в работе перемешивающих органов показал, что для них эту методику использовать проблематично. У них слишком много конструктивных элементов, которые искажают гидродинамическую картину течения жидкости. Описать ее чисто аналитически просто невозможно.

Это вынудило нас обратиться к эмпирическому методу, реализованному при определении мощности привода мешалок для жидкости [5], [6]. Он основан на теории подобия и представляет собой функциональную зависимость модифицированного критерия Эйлера  $Eu_M$  от подобного критерия  $Re_M$  Рейнольдса:  $Eu_M = f(Re_M)$ .

Модифицированный критерий Эйлера часто называется критерием мощности, обозначается  $K_N$ , и рассчитывается по формуле:

$$K_N = \frac{N}{\rho_c n^3 d^5}, \quad (3)$$

где  $n$  – частота вращения мешалки, с<sup>-1</sup>;

$d$  – диаметр мешалки, м.

В свою очередь, модифицированный критерий  $Re_M$  для мешалок, полученный из условия, что скорость  $v \sim nd$ :

$$Re_M = \frac{nd^2 \rho_c}{\mu_c}, \quad (4)$$

где  $\mu_c$  – вязкость суспензии, Н·с/м<sup>2</sup>.

Плотность и вязкость суспензии, как сплошной системы, определяли по формулам, представленным в работе [3]:

$$\rho_c = \rho_m c_m + \rho_{ш} c_{ш} + \rho_{ж} (1 - c_m - c_{ш}), \quad (5)$$

где  $\rho_{ш}$  – плотность мелющих тел (шаров), кг/м<sup>3</sup>;

$c_m$  и  $c_{ш}$  – массовая доля мелющих тел и измельчаемого материала, соответственно;

$\rho_m$  и  $\rho_{ж}$  – плотность измельчаемого материала и жидкости, соответственно, кг/м<sup>3</sup>;

$$\mu_c = \mu_{ж} (1 + 4,5(c_m + c_{ш})), \quad (6)$$

где  $\mu_{ж}$  – динамическая вязкость жидкости, Н·с/м<sup>2</sup>.

Чаще всего [5], [6] значение критерия  $Re_m$  рассчитывается в зависимости от частоты вращения  $n$  при остальных фиксированных параметрах. Однако в нашем случае для эффективного измельчения частота вращения должна быть фиксированной, соответствующей окружной скорости мешалки ( $v = \pi n d$ ) близкой к 10 м/с [7]. В этой связи основным параметром, влияющим на критерий  $Re_m$ , является плотность перемешиваемой среды  $\rho_c$  и в значительно меньшей степени ее вязкость  $\mu_c$ .

Действительно при постоянном коэффициенте загрузки ( $\varphi = 0,85$ ) основную долю в ее плотности (5) составляет плотность измельчающих тел. В процессе экспериментов она может легко изменяться за счет применения шариков из разного материала. В нашей работе использовались шарики одинакового диаметра (2 мм), выполненные из керамики, стали и стекла.

В процессе экспериментов для всех конструктивных вариантов мельниц определялась мощность привода мешалок при различных значениях центробежного критерия Рейнольда –  $Re_{ц}$ . Далее по ее величине по формуле (3) рассчитывался критерий мощности  $K_N$ .

Экспериментальные данные представлены в виде графических зависимостей  $K_N = f(Re_{ц})$  на рисунке 2а для вертикальной и 2б для горизонтальной мельниц.

Следует отметить, что эти графические зависимости по характеру изменения подобны полученным ранее [5], [6] для нормализованных мешалок.

Экспериментальные данные обработаны и представлены в виде эмпирических зависимостей для всех конструктивных вариантов.

а) Вертикальная бисерная мельница:

1 – ротор с круглыми дисками:

$$K_N = 27,885 Re_{ц}^2 - 21,105 Re_{ц} + 6,1375; \quad (7)$$

2 – ротор с треугольными дисками:

$$K_N = 33,802 Re_{ц}^2 - 25,546 Re_{ц} + 7,1069; \quad (8)$$

3 – ротор со штырями:

$$K_N = 58,594 Re_{ц}^2 - 40,132 Re_{ц} + 9,5831; \quad (9)$$

4 – ротор с наклонными дисками:

$$K_N = 59,794 Re_{ц}^2 - 39,569 Re_{ц} + 9,0748. \quad (10)$$

б) Горизонтальная бисерная мельница:

1 – ротор с круглыми дисками:

$$K_N = 40,548 Re_{ц}^2 - 27,769 Re_{ц} + 6,7027; \quad (11)$$

2 – ротор с треугольными дисками:

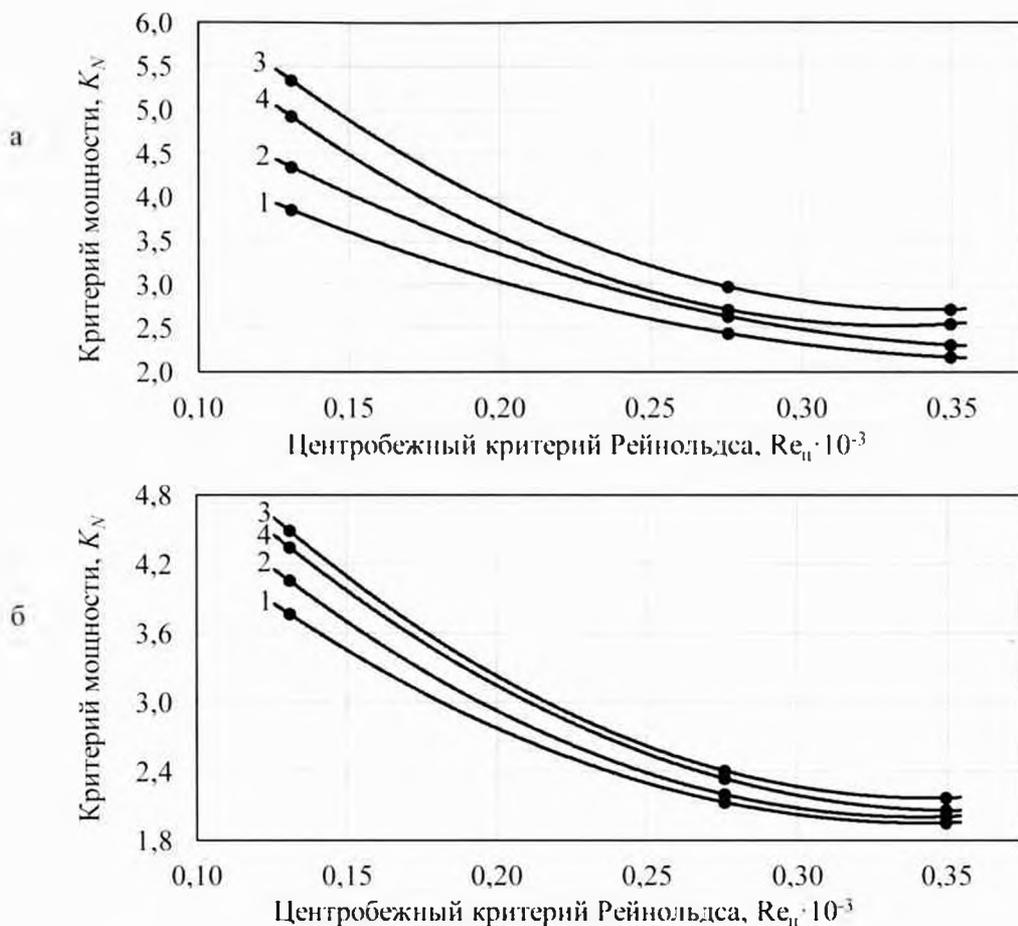
$$K_N = 46,625 Re_{II}^2 - 31,763 Re_{II} + 7,4106; \quad (12)$$

3 – ротор со штырями:

$$K_N = 51,138 Re_{II}^2 - 35,174 Re_{II} + 8,2138; \quad (13)$$

4 – ротор с наклонными дисками:

$$K_N = 46,281 Re_{II}^2 - 32,675 Re_{II} + 7,8253. \quad (14)$$



а – вертикальная бисерная мельница; б – горизонтальная бисерная мельница;

1 – ротор с круглыми дисками; 2 – ротор с треугольными дисками;

3 – ротор со штырями; 4 – ротор с наклонными дисками

Рисунок 2 – Зависимость критерия мощности от центробежного критерия Рейнольдса

По определенному из графиков (рисунок 2) или рассчитанному по формулам (7)–(14) критерию  $K_N$  из формулы (3) рассчитывается мощность мешалки, являющаяся основным энергетическим параметром процесса измельчения в бисерной мельнице.

Как отмечалось в начале этой статьи, для сравнения различных конструктивных вариантов важны не абсолютные значения энергозатрат, а их относительная величина – удельные энергозатраты  $q$ . Обычно, особенно в производственных условиях, удельные энергозатраты технологических агрегатов относятся к единице производимой продукции (производительности).

$$q = N/Q, \text{ кВт} \cdot \text{ч/т}, \quad (15)$$

где  $Q$  – производительность агрегата, т/ч (кг/с).

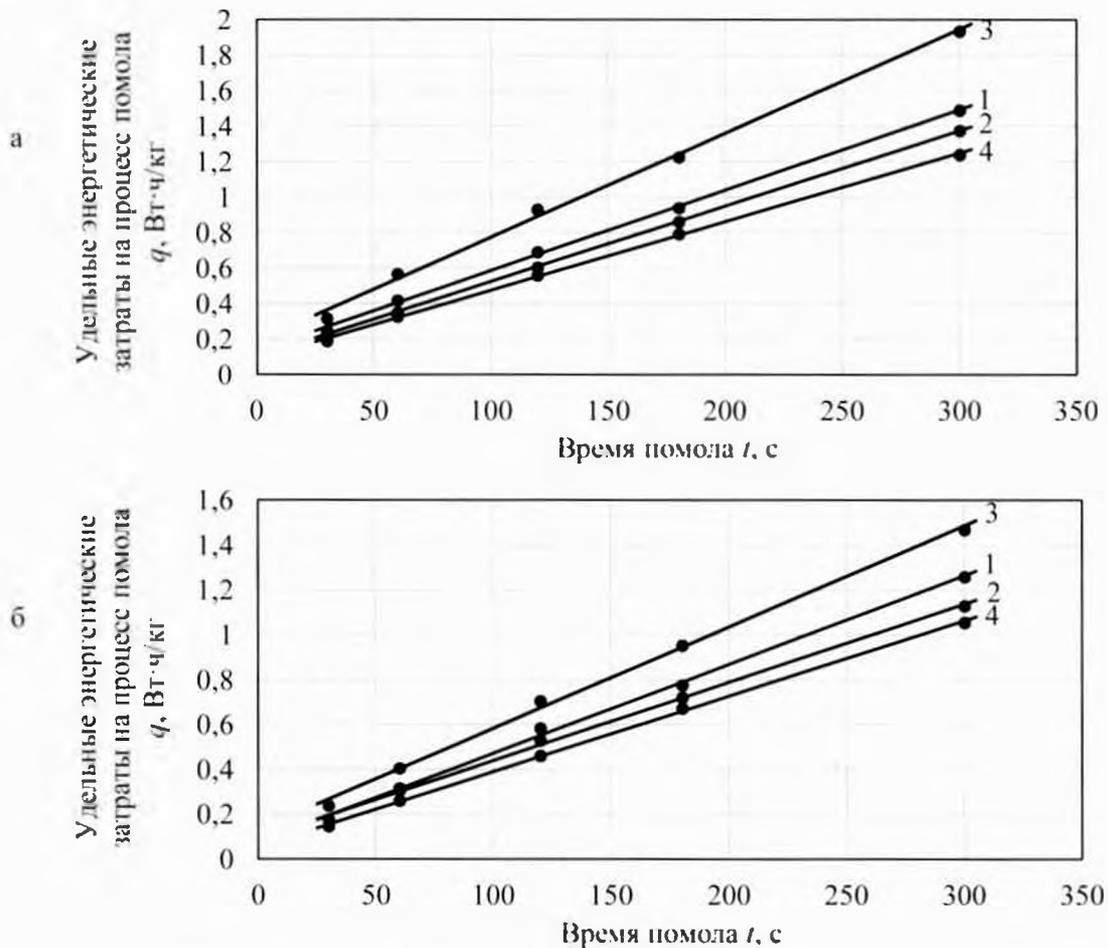
Однако в этой формуле не учитывается эффективность, как качественного параметра процесса, реализуемого в агрегате. Нами при изучении ряда процессов и агрегатов предложено определять энергоэффективность с дополнительным учетом этого параметра [8]:

$$q = N/(QE), \quad (16)$$

где  $E$  – эффективность процесса.

Эффективность, преимущественно, безразмерная величина, определяемая в долях или процентах. В нашем случае это процент частиц, размер которых менее 5 мкм, что соответствует сверхтонкому помолу, реализуемому в бисерных мельницах.

Подставив полученные в ходе экспериментов данные в формулу (16), были проведены расчеты и построены графические зависимости удельных энергозатрат от времени помола для всех восьми конструктивных вариантов бисерных мельниц (рисунок 3).



а – вертикальная бисерная мельница; б – горизонтальная бисерная мельница;

1 – ротор с круглыми дисками; 2 – ротор с треугольными дисками;

3 – ротор со штырями; 4 – ротор с наклонными дисками

Рисунок 3 – Зависимость удельных энергозатрат от времени помола

На графиках четко прослеживается линейное возрастание удельных энергетических затрат с увеличением продолжительности процесса помола. Это является вполне логичным, так как чем меньше размер частиц мы хотим получить, тем больше энергии на это должны затратить.

За первые 30 секунд значения энергоэффективности не сильно отличаются друг от друга на (0,05–0,15) Вт·ч/кг. Однако в дальнейшем эта разница возрастает и достигает до (0,4–0,8) Вт·ч/кг.

Обладающими наименьшими удельными энергозатратами оказался ротор с наклонными дисками. Хотя ему требуется большее количество мощности на перемешивание загрузки, однако за счет более высокой эффективности его удельные энергозатраты на (0,1–0,7) Вт·ч/кг меньше, чем у других типов роторов.

Горизонтальное расположение помольной камеры приводило к незначительному, около 5 %, увеличению эффективности. В связи с более равномерным распределением мелющих тел по размерам в объеме рабочей камеры, а также за счет небольшого оголения верхней части ротора затраты мощности на перемешивание у горизонтальных мельниц меньше, чем у вертикальных. Все это, в свою очередь, привело к снижению удельных энергозатрат на (0,1–0,45) Вт·ч/кг.

### **Заключение**

В результате исследования измельчения материала определена мощность, затрачиваемая на процессе помола для восьми конструктивных исполнений бисерных мельниц. Установлено, что энергозатраты в бисерных мельницах зависят от конструкции перемешивающего органа. В горизонтальных мельницах эта зависимость позволяет варьировать потребляемую мощность в диапазоне 10–15 %, а в вертикальных – 20–30 %. Мельницы со штыревыми роторами и роторами с наклонными дисками потребляют больше энергии по сравнению с другими конструкциями.

Предложен метод для определения затрат мощности на перемешивание загрузки, основанный на определении критерия мощности в зависимости от критерия Рейнольдса, по графическим зависимостям или эмпирическим формулам.

Определены удельные энергозатраты на процессе помола с учетом эффективности процесса. Это позволило получить более объективную оценку преимуществ отдельных конструкций бисерных мельниц, в результате чего установлено, что горизонтальное расположение помольной камеры способствовало снижению удельных энергозатрат на (0,1–0,45) Вт·ч/кг. Ротор с наклонными дисками показал наименьшие удельные энергозатраты, которые на (0,1–0,7) Вт·ч/кг ниже, чем у других типов роторов.

### **Список использованных источников**

1. Козловский, В. И. Оптимизация процесса сверхтонкого помола в шаровой мельнице с мешалкой: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.17.08 / Козловский Виталий Игоревич; Белорус. гос. технологич. ун-т. – Минск, 2017. – 24 с.
2. Козловский, В. И. Эффективность диспергирования материалов в вертикальной и горизонтальной бисерных мельницах / В. И. Козловский, П. Е. Вайтехович, Д. В. Кульша // Горная механика и машиностроение. – 2025. – № 3. – С. 35–40.
3. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг; под ред. Л. Г. Лойцянского. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
4. Козловский, В. И. Определение энергозатрат на вращение рабочего органа шаровой мельницы с мешалкой / В. И. Козловский, П. Е. Вайтехович // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2016. – № 5–6. – С. 14–17.
5. Касаткин, А. Г. Основные процессы и аппараты химической технологии: учеб. для вузов, учеб. для студентов химико-технологич. спец. вузов / А. Г. Касаткин. – 15-е изд., стер. – М.: Альянс, 2009. – 750 с.
6. Васильцов, Э. А. Аппараты для перемешивания жидких сред: справоч. пособ. / Э. А. Васильцов, В. Г. Ушаков. – Ленинград: Машиностроение, 1979. – 272 с.

7. Козловский, В. И. Измельчение материалов в шаровой мельнице с мешалкой непрерывного действия / В. И. Козловский, П. Е. Вайтехович // Вестник ПГУ. Сер. В. Промышленность. Прикладные науки. – 2016. – № 3. – С. 61–65.

8. Вайтехович, П. Е. Технико-экономическое обоснование и выбор оптимальной насадки / П. Е. Вайтехович, Д. Ю. Мытько // Труды БГТУ. Сер. 2. Химические технологии, биотехнологии, геоэкология. – 2021. – № 1 (241). – С. 69–73.

#### Информация об авторах

*Виталий Игоревич Козловский* – кандидат технических наук, доцент кафедры машин и аппаратов химических и силикатных производств, УО «Белорусский государственный технологический университет» (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Беларусь), e-mail: mr.vit.koz@mail.ru. ID ORCID: 0009-0005-5898-3913.

*Петр Евгеньевич Вайтехович* – доктор технических наук, профессор кафедры машин и аппаратов химических и силикатных производств, УО «Белорусский государственный технологический университет» (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Беларусь), e-mail: vpe51@mail.ru. ID ORCID: 0000-0002-0355-4717.

*Денис Николаевич Боровский* – кандидат технических наук, доцент кафедры машин и аппаратов химических и силикатных производств, УО «Белорусский государственный технологический университет» (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Беларусь), e-mail: dzianis23@rambler.ru. ID ORCID: 0000-0001-9698-2464.

*Дмитрий Владимирович Кульша* – магистрант кафедры машин и аппаратов химических и силикатных производств, УО «Белорусский государственный технологический университет» (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Беларусь), e-mail: d.prostosmile@gmail.com. ID ORCID: 0009-0007-8177-2916.

#### Information about the authors

*Vital Kozlouskiy* – Ph. D. (Engineering), Associate Professor of the Department “Machines and Apparatus of Chemical and Silicate Productions”, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova Str., 220006, Minsk, Belarus), e-mail: mr.vit.koz@mail.ru. ID ORCID: 0009-0005-5898-3913.

*Peter Vaitekovich* – D. Sc. (Engineering), Professor of the Department “Machines and Apparatus of Chemical and Silicate Productions”, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova Str., 220006, Minsk, Belarus), e-mail: vpe51@mail.ru. ID ORCID: 0000-0002-0355-4717.

*Denis Borovskiy* – Ph. D. (Engineering), Associate Professor of the Department “Machines and Apparatus of Chemical and Silicate Productions”, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova Str., 220006, Minsk, Belarus), e-mail: dzianis23@rambler.ru. ID ORCID: 0000-0001-9698-2464.

*Dzmitry Kulsha* – Master Student of the Department “Machines and Apparatus of Chemical and Silicate Productions”, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova Str., 220006, Minsk, Belarus), e-mail: d.prostosmile@gmail.com. ID ORCID: 0009-0007-8177-2916.

Поступила в редакцию 16.10.2025 г.