

$$P_j := Y_j P_{j+1} A^{T_{j+1}-T_j}, \lambda_j := Y_j \lambda_{j+1} \geq 0,$$

$$g_j := Y_j (g_{j+1} - \gamma_j) - \sum_{t \in \Delta_j} P_{j+1} A^{T_j-t-1} B u_{\min} + \sum_{t \in \Delta_j} V_j(t) (u_{\max} - u_{\min}),$$

$$P_{N+1} := \begin{pmatrix} H \\ c' \end{pmatrix}, g_{N+1} := \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_{N+1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_j := w_{\max} \sum_{t \in \Delta_j} \| P_{j+1} A^{T_{j+1}-t-1} M \|_1$$

и строки матриц  $Y_j \in R^{m_j \times m_{j+1}}$ ,  $V_j(t) \in R^{m_j \times r}$ ,  $t \in \Delta_j$ , образуют фундаментальную систему решений неравенств

$$\left( P_{j+1} A^{T_{j+1}-t-1} B \right)' y_j + v_j(t) \geq 0, t \in \Delta_j, y_j \geq 0, v_j(t) \geq 0, t \in \Delta_j.$$

Представления (9) играют значительную роль при построении оптимальных стратегий управления и позволяют сводить задачи вида (5) к задачам линейного программирования [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитрук, Н.М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления / Н.М. Дмитрук // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2022. – Т.28, №3. – С. 66-82.

УДК 536.24

Т.Б. Карлович, доц., канд. физ.-мат. наук,  
А.Л. Наркевич, доц., канд. техн. наук (БГТУ, г. Минск)

### ВЛИЯНИЕ СИЛЫ ТРЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ ВОЛЧКА ТИП-ТОП ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЕГО АВТОМАТИЗИРОВАННОМ ЗАПУСКЕ

Волчок тип-топ – это устройство, способное переворачиваться на  $180^\circ$  во время своего движения по горизонтальной поверхности за счет действия силы трения. При этом сухое трение волчка о плоскость в случае его быстрого вращения можно заменить моделью вязкого трения [1], описываемого формулой

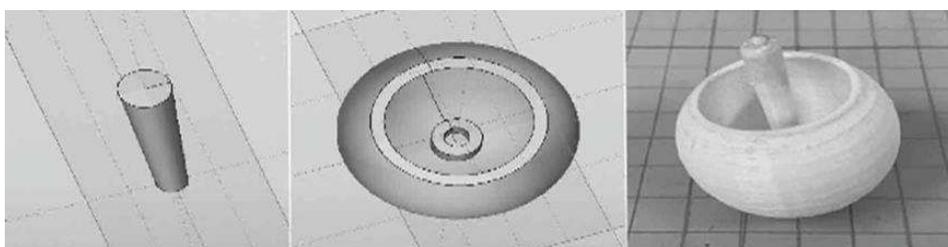
$$F = -\mu u, \quad (1)$$

где  $F$  – сила трения скольжения;  $\mu$  – коэффициент вязкого трения скольжения;  $u$  – скорость точки касания волчка горизонтальной плоскости.

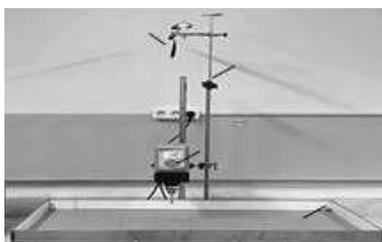
Теоретическое описание движения волчка тип-топ на основе численных и аналитических решений нелинейных динамических уравнений с использованием формулы (1) представлено в работах [2,

3]. Однако в этих решениях отсутствует определение минимального значения силы трения, начиная с которого возможен переворот волчка на  $180^\circ$ . В настоящей работе существование нижнего порогового значения силы трения будет продемонстрировано экспериментально с использованием волчка, распечатанного из полилактида на 3D-принтере. 3D-модели элементов и фото волчка представлены на рис. 1.

Волчок состоит из сферической оболочки толщиной 1 мм и диаметром 38 мм, срезанной на  $\frac{1}{4}$  часть, и ножки в виде усеченного конуса с меньшим диаметром 3 мм и большим диаметром 6 мм по торцам, которая вставляется в цилиндрическое отверстие в шляпке (рис. 1).



**Рисунок 1 – 3D-модели элементов и фото волчка:**  
*а* – 3D-модель ножки, *б* – 3D-модель сферической оболочки, *в* – фото волчка



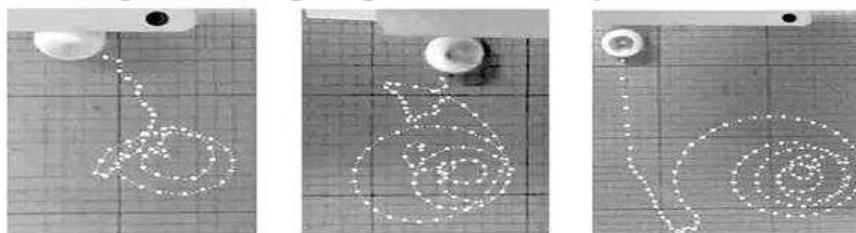
**Рисунок 2 – Экспериментальная установка**

Для автоматизированного запуска волчка используется устройство с полым ротором электродвигателя *1* рис. 2, в котором закрепляется цилиндрическая трубка длиной 0,3 м и внутренним диаметром 6 мм. Волчок ножкой вставляется в нижний конец трубки и раскручивается до требуемой скорости, а затем выталкивается на горизонтальную поверхность алюминиевого манежа *2* размером 0,6×0,9 м, покрытого порошковой краской и расчерченного графитовым грифелем на квадраты размером 10×10 мм. В качестве толкателя используется вязальная проволока диаметром 1 мм и длиной 0,4 м. Бортики манежа высотой 60 мм с внутренней стороны обкладываются макетным картоном для смягчения ударов волчка о них. Движение волчка записывается при помощи видеокамеры смартфона (не показан), зафиксированного в селфи-палке *3*, прикрепленной к штативу *4*.

Примеры траекторий при различных скоростях раскручивания волчка приведены на рис. 3а, 3б, 3в. Крупные белые точки соответ-

ствуют положению точки касания волчка поверхности манежа в данный момент времени, мелкие белые точки – это аппроксимация участка траектории движения волчка, которая не попала в кадр видеосъемки. Из всех траекторий видно, что переворот волчка происходит почти мгновенно после начала движения по плоскости манежа (точки *A*), затем волчок начинает петлять (область *B*), разворачиваясь почти на  $180^\circ$  в горизонтальной плоскости, причем форма петли существенно зависит от скорости раскручивания волчка. Так при скорости 2000 об/мин. петля имеет вытянутую форму (рис. 3а), при скорости 2500 об/мин. петля принимает форму неправильного треугольника (рис. 3б), а при скорости 3000 об/мин. наблюдается П-образный отрезок траектории (рис. 3в). После петлеобразного движения следует движение по скручивающейся спирали, параметры которой зависят от скорости раскручивания волчка: с ее ростом увеличивается максимальный радиус закручивания спирали и число ее витков (для скорости 2000 об/мин. максимальный радиус составляет 30 мм, число витков – 2, для скорости 2500 об/мин. максимальный радиус – 50 мм, число витков – 3, для скорости 3000 об/мин. – максимальный радиус – 80 мм, число витков – 4).

Когда радиус скручивающейся спирали становится малым, начинается последний этап движения волчка – обратный переворот с ножки на шляпку (точка *C*) и движение по раскручивающейся спирали (отрезок траектории *CD* на рис. 3б). В отличие от траекторий с ручным раскручиванием волчка, описанных в работе [4], для всех траекторий движения волчка с автоматизированным раскручиванием характерен короткий начальный этап движения на шляпке до переворота на ножку, длинный период вращения на ножке и короткий этап движения после обратного переворота на шляпку.



**Рисунок 3 – Траектории движения волчка при различных скоростях вращения ротора раскручивающего устройства:  
*a* – 2000 об/мин, *б* – 2500 об/мин, *в* – 3000 об/мин.**

**На траекториях точка *A* соответствует точке переворота волчка с шляпки на ножку, область *B* – петлеобразному движению, точка *C* – обратному перевороту волчка с ножки на шляпку**

В первоначальных опытах с волчком тип-топ до нанесения разметки грифелем на поверхность манежа он начинал переворачиваться при скорости раскручивания 2000 об/мин. После нанесения разметки

волчок перестал переворачиваться даже при раскрутке со скоростью 3000 об/мин. Этот эффект можно объяснить уменьшением шероховатости поверхности из-за присутствия графита (эффект «графитовой смазки») и, соответственно, уменьшением коэффициента трения. Далее поверхность шляпки волчка зачищалась шлифовальной шкуркой с зернистостью Р400. После обработки шкуркой волчок вновь приобретал способность переворачиваться на ножку в течение нескольких запусков. Потом способность к перевороту опять исчезала из-за истирания поверхности волчка и налипания на нее частиц графита, и требовалась повторная обработка шкуркой для придания волчку требуемой шероховатости поверхности. Можно сделать вывод, что существует нижнее пороговое значение шероховатости взаимодействующих поверхностей (и коэффициента трения между поверхностями манежа и волчка соответственно), начиная с которого возможен переворот при движении волчка по горизонтальной поверхности.

В работе [5] подобный эффект наблюдался при ручном раскручивании волчка. В ней результат «неудачного» запуска волчка без переворота связывался с недостаточной начальной скоростью раскручивания, а следовательно, и с недостаточной скоростью  $u$ , которая в свою очередь пропорциональна силе трения согласно формуле (1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62, вып. 5, С. 762–767.

2. Маркеев А.П. К динамике волчка // Изв. АН СССР. Механ. тв. тела. – 1984. № 3. С. 30-38.

3. Карапетян А.В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. Т. 43, № 3. С. 33-41.

4. Карлович Т. Б., Васеха А. П., Ласовский Р. Н. Экспериментальное исследование траектории точки касания волчка тип-топ с горизонтальной поверхностью при его движении // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2(284). С.19–24

5. Карлович Т. Б., Ласовский Р. Н. Исследование кинетических характеристик волчка tip-top с горизонтальной поверхностью при его движении // Информационные технологии: материалы докл. 88-й науч.-техн. конф. проф.-преподавательского состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 29 января – 16 февраля 2024 г. [Электронный ресурс]. Минск: БГТУ, 2024. С. 243–246. URL:

<https://elib.belstu.by/bitstream/123456789/67770/1/3.%20Карлович.pdf>  
(дата обращения: 14.11.2025).