ЛИТЕРАТУРА

1. Wiener N., The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, Massachusetts J. Math., 3 (1924), 72–94.

2. Б.И. Голубов, О функциях ограниченной p-вариации, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, том 32, выпуск 4, 837–858

3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

4. Пономарева, С.В. Дробная производная Вейля почти периодических функций / С. В. Пономарева, О. Н. Пыжкова // Информационные технологии. Физика и математика: материалы 88-й науч.-техн. конф. профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 29 января – 16 февраля 2024 г. – Минск: БГТУ, 2024. – С. 298-301.

5. Левитан Б.М . Почти-периодические функции / Б.М. Левитан. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 396 с.

УДК 517.977

Н.М. Дмитрук, канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой
(БГУ, г. Минск)

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ В КЛАССЕ МНОГОКРАТНО ЗАМЫКАЕМЫХ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ

1. Рассматривается задача построения множеств управляемости для стационарной линейной системы с возмущениями, т.е. множеств начальных состояний, из которых систему можно перевести с гарантией на заданное терминальное множество за фиксированное время. Задача исследуется в специальном классе управлений – многократно замыкаемых стратегий [1], которые строятся в предположении о том, что в некоторые наперед заданные будущие моменты времени состояние системы с возмущением станет известным, и можно будет построить новое управление на промежутке до поступления следующего измерения состояния. Кроме того, исследуется задача построения множеств управляемости, все состояния обеспечивают гарантированное значение линейного терминального критерия качества не хуже некоторого заданного.

2. Рассмотрим линейную дискретную систему

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t)\,,\ t = 0,1,\ldots,T-1\,, \qquad (1)$$

где $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^r$, $w(t)\in R^p$ – состояние, управление, неизвестное возмущение в момент времени t, A, B, M – заданные матрицы соответствующего размера.

На состояния, управления и возмущения наложены ограничения:

$$x(T)\in X_T,\ u(t)\in U,\ w(t)\in W,\ t=0,1,\ldots,T-1, \qquad (2)$$

где $X_T=\{x\in R^n : Hx\le g\}$, $H\in R^{m\times n}$, $g\in R^m$, $U=\{u\in R^r : u_{\min}\le u\le u_{\max}\}$, $W=\{w\in R^p : \|w\|_\infty\le w_{\max}\}$.

Определим многократно замыкаемую стратегию управления [1]. Пусть до начала процесса управления зафиксированы N моментов замыкания $0<T_1<\ldots<T_N<T$. Они разбивают интервал управления на промежутки $\Delta_j=\{T_j,T_j+1,\ldots T_{j+1}-1\}$, j=0,1,…,N, где $T_0=0$, $T_{N+1}=T$.

Управление на Δ_j будем обозначать $u_j(\cdot)=(u_j(t),t\in\Delta_j)$, возмущение – $w_j(\cdot)=(w_j(t),t\in\Delta_j)$, множества доступных на Δ_j управлений обозначим U_j, возможных возмущений – W_j. Состояние системы (1) в момент времени $t\in\Delta_j$ при начальном состоянии $x(T_j)=x_j$, управлении $u_j(\cdot)$ и возмущении $w_j(\cdot)$ будем обозначать $x(t\,|\,x_j,u_j,w_j)$. Множество возможных состояний в момент T_{j+1} обозначим $X(T_{j+1}\,|\,x_j,u_j)$.

Сделаем предположение: в каждый момент T_j, j=1,…,N, можно:

1) точно измерить текущее состояние $x^*(T_j)\in X(T_j\,|\,x_{j-1},u_{j-1})$ системы;

2) в зависимости от $x^*(T_j)$ выбрать новое управление $u_j(\cdot\,|\,x^*(T_j))\in U_j$.

Поскольку состояния $x^*(T_j)$, заранее не известны, определим стратегии управления как функции произвольных позиций процесса управления (T_j,x_j), j = 1,…,N.

Определение 1. Для позиции (T_j,x_j), j = $N-1$,…,0, стратегией с $N-j$ моментами замыкания $T_{j+1},\ldots,T_N$ назовем совокупность

$$\pi_{N-j}(T_j,x_j)=\{u_j(\cdot\,|\,x_j);\pi_{N-j-1}(T_{j+1},x_{j+1}),x_{j+1}\in X(T_{j+1}\,|\,x_j,u_j)\}, \qquad (3)$$

состоящую из управления $u_j(\cdot\,|\,x_j)\in U_j$ на Δ_j и семейства стратегий $\pi_{N-j-1}(T_{j+1},x_{j+1})$ с $N-j-1$ моментами замыкания, определенных для всех возможных состояний $x_{j+1}\in X(T_{j+1}\,|\,x_j,u_j)$. Здесь считается, что стратегия $\pi_0(T_N,x_N)$ совпадает с управлением $u_N(\cdot\,|\,x_N)\in U_N$.

Определение 2. Управление $u_j(\cdot|x_j)$ в (3) будем называть начальной программой (на Δ_j для состояния x_j).

Траекторию системы (1) с начальным состоянием $x(0)=x_0$, соответствующую стратегии $\pi_N(0,x_0)$ и возмущению $w(\cdot)=(w_0(\cdot),\ldots,w_N(\cdot))$, будем обозначать $x(t|x_0,\pi_N,w)$, $t=0,1,\ldots,T-1$, и определять как последовательное решение систем

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu_0(t|x_0)+Mw_0(t),\ x(0)=x_0,\ t\in\Delta_0,$$

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu_j(t|x(T_j))+Mw_j(t),$$

$$x(T_j)=x(T_j|x(T_{j-1}),u_{j-1},w_{j-1}),\ t\in\Delta_j,\ j=1,\ldots,N.$$

Для позиции (T_j,x_j), $j=1,\ldots,N$, траектория $x(t|x_j,\pi_{N-j},w)$, $t=T_j,\ldots,T$, определяется аналогично.

Определение 3. Для позиции (T_j,x_j), $j = 1,\ldots,N$, стратегия управления $\pi_{N-j}(T_j,x_j)$ называется допустимой, если $x(T|x_j,\pi_{N-j},w)\in X_T$ $\forall w(t)\in W$, $t=T_j,\ldots,T-1$.

Определение 4. Множеством управляемости системы (1) при ограничениях (2) в классе стратегий управления (3) в момент T_j назовем совокупность всех состояний x_j для которых найдется допустимая стратегия $\pi_{N-j}(T_j,x_j)$.

3. Введем множества: $X_{N+1}:=X_T$,

$$X_j:=\left\{x_j\in R^n:\exists u_j(\cdot|x_j)\in U_j, X(T_{j+1}|x_j,u_j)\subset X_{j+1}\right\},\ j = N,\ldots,0, \tag{4}$$

т.е. каждое множество X_j составим из всех точек x_j, для которых существует управление $u_j(\cdot|x_j)\in U_j$, переводящее систему (1) с гарантией на следующее множество X_{j+1}.

Лемма 1. Для позиции (T_j,x_j), $j = N,\ldots,0$, стратегия $\pi_{N-j}(T_j,x_j)$ с $N-j$ моментами замыкания $T_{j+1},\ldots,T_N$ допустима, если ее начальная программа $u_j(\cdot|x_j)\in U_j$ удовлетворяет условию

$$X(T_{j+1}|x_j,u_j)\subset X_{j+1}.$$

Таким образом, каждое множество X_j вида (4) есть множество управляемых с гарантией на терминальное множество X_T состояний системы (1) в момент T_j в классе стратегий управления с $N-j$ моментами замыкания $T_{j+1},\ldots,T_N$, т.е. искомое множество управляемости.

4. Нас будет интересовать также построение множеств управляемости, для точек которых найдется стратегия управления, обеспечивающая гарантированное значение некоторого терминального критерия качества не более наперед заданного значения α. Пусть такой критерий имеет вид $c'x(T)$, где $c \in R^n$.

Определение 5. Для позиции (T_j, x_j), j = 1,…,N, допустимая стратегия управления $\pi^0_{N-j}(T_j, x_j)$ называется оптимальной, если $\pi^0_{N-j}(T_j, x_j) = \arg\min_{\pi}\max_{w} c'x(T \mid x_j, \pi_{N-j}, w)$.

Применяя рассуждения динамического программирования, можно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 2. Для позиции (T_j, x_j), j = N,…,0, допустимая стратегия $\pi^0_{N-j}(T_j, x_j)$ с $N - j$ моментами замыкания $T_{j+1},\dots,T_N$ оптимальна, если ее начальная программа $u^0_j(\cdot \mid x_j) \in U_j$ находится как решение задачи

$$V_j(x_j) = \min_{u_j \in U_j}\max_{w_j \in W_j} V_{j+1}\Big(x(T_{j+1} \mid x_j, u_j, w_j)\Big). \qquad (5)$$

Уравнение (5), $x_j \in X_j$, j=0,1,…,N, есть уравнение Беллмана.

Пусть задано некоторое значение $\alpha \in R$. Введем множества

$$X_j(\alpha) := \Big\{x \in R^n : V_j(x) \le \alpha\Big\},\ j=0,1,\dots,N. \qquad (6)$$

По построению, множество $X_j(\alpha)$ вида (6) есть множество управляемых с гарантией на терминальное множество X_T состояний системы (1) в момент T_j в классе стратегий управления с $N - j$ моментами замыкания $T_{j+1},\dots,T_N$, для которых гарантировано значение критерия качества, не превосходящее заданного α. Центральный результат работы – описание множеств (6) в зависимости от параметра α.

Теорема 1. Пусть для выбранных моментов замыкания $T_1,\dots,T_N$ не пусто множество X_1. Тогда для любого j=0,1,…,N множество $X_j(\alpha)$ (в том случае, если оно не пусто при выбранном значении α) является выпуклым многогранником вида

$$X_j(\alpha) = \{x \in R^n : P_j x \le g_j + \lambda_j \alpha\}, \qquad (9)$$

где $P_j \in R^{m_j \times n}$, $g_j, \lambda_j \in R^{m_j}$ вычисляются рекуррентно по правилам

$$P_j := Y_j P_{j+1} A^{T_{j+1}-T_j}, \; \lambda_j := Y_j \lambda_{j+1} \geq 0,$$

$$g_j := Y_j (g_{j+1} - \gamma_j) - \sum_{t \in \Delta_j} P_{j+1} A^{T_j - t - 1} B u_{\min} + \sum_{t \in \Delta_j} V_j(t)(u_{\max} - u_{\min}),$$

$$P_{N+1} := \begin{pmatrix} H \\ c' \end{pmatrix}, \; g_{N+1} := \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}, \; \lambda_{N+1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \gamma_j := w_{\max} \sum_{t \in \Delta_j} \| P_{j+1} A^{T_{j+1}-t-1} M \|_1$$

и строки матриц $Y_j \in R^{m_j \times m_{j+1}}$, $V_j(t) \in R^{m_j \times r}$, $t \in \Delta_j$, образуют фундаментальную систему решений неравенств

$$\left(P_{j+1} A^{T_{j+1}-t-1} B \right)' y_j + v_j(t) \geq 0, \; t \in \Delta_j, \; y_j \geq 0, \; v_j(t) \geq 0, \; t \in \Delta_j.$$

Представления (9) играют значительную роль при построении оптимальных стратегий управления и позволяют сводить задачи вида (5) к задачам линейного программирования [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитрук, Н.М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления / Н.М. Дмитрук // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2022. – Т.28, №3. – С. 66-82.

УДК 536.24

Т.Б. Карлович, доц., канд. физ.-мат. наук,
А.Л. Наркевич, доц., канд. техн. наук (БГТУ, г. Минск)

ВЛИЯНИЕ СИЛЫ ТРЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ ВОЛЧКА ТИП-ТОП ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЕГО АВТОМАТИЗИРОВАННОМ ЗАПУСКЕ

Волчок тип-топ – это устройство, способное переворачиваться на 180° во время своего движения по горизонтальной поверхности за счет действия силы трения. При этом сухое трение волчка о плоскость в случае его быстрого вращения можно заменить моделью вязкого трения [1], описываемого формулой

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{u}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{F}$ – сила трения скольжения; μ – коэффициент вязкого трения скольжения; $\boldsymbol{u}$ – скорость точки касания волчка горизонтальной плоскости.

Теоретическое описание движения волчка тип-топ на основе численных и аналитических решений нелинейных динамических уравнений с использованием формулы (1) представлено в работах [2,