

$$\frac{dc}{dy} = -\frac{c}{q} \frac{dq}{dy} = \frac{cU_0}{q}. \quad (8)$$

Концентрация определяет плотность суспензии:

$$\rho = \rho_T c + \rho_{Ж}(1 - c). \quad (9)$$

Полученная математическая модель пленочного обезвоживания суспензии на внутренней поверхности пронизываемого вращающегося конуса позволяет рассчитать режимы движения и другие гидродинамические характеристики в зависимости от геометрических параметров конуса, его частоты вращения и нагрузок по суспензии с учетом ее физических и реологических свойств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чудаков Г. М., Иванов М. Г. Разработка фильтрующих центрифуг // Вестник БГТУ. – 2015.– № 5. – С. 244-269.
2. Волк А. М., Марков В. А., Лютаревич И. А. Пленочное движение вязкой жидкости по внутренней поверхности вращающегося конуса // Труды БГТУ. Серия VI Физико-математические науки и информатика. – Минск, 2005. – Вып. XIII. – С. 35–38.
3. Бувечич Ю. А., Марков В. Г. Континуальная механика монодисперсных суспензий. Реологические уравнения состояния для суспензий умеренной концентрации // Приклад. математика и механика. – 1973. – Т. 37. – Вып. 6. – С. 1059–1077.
4. Гельперин Н. И. Основные процессы и аппараты химической технологии: В 2 кн. – М.: Химия, 1981. – 812 с. – Серия «Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии».
5. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1975. – 560 .

УДК 517.948

С.В. Пономарева, доц., канд. физ.-мат. наук (ГП «Стравита», г. Минск);
О.Н. Пыжкова, зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

О ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ Р-ВАРИАЦИИ

Исследуются возможности дробного дифференцирования по Вейлю почти периодических функций ограниченной p -вариации. Такой класс функций активно исследуется в последнее время в контексте аномальной диффузии, вязкоупругих материалов, управляемых систем с памятью и квазикристаллических сред.

Понятие 2π -периодических функций ограниченной p -вариации ($p > 0$) было введено Винером (см. [1, 2]).

Пусть $f(t)$ – действительная функция с периодом 2π . Обозначим через R разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 2\pi$ и положим $|\kappa| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ – диаметр разбиения. Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит классу V_p ($p > 0$), т. е. имеет ограниченную p -вариацию, если

$$V_p^*(f) \equiv \limsup_{\delta \rightarrow +0} \sup_{|\kappa| \leq \delta} \left(\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что условие (1) эквивалентно следующему:

$$V_p^*(f) \equiv \sup_{\kappa} \left(\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (2)$$

Заметим, что между классами V_p очевидно выполняются включения, аналогично включениям лебеговских классов. При $p = 1$ класс V_p совпадает с обычным классом функций ограниченной вариации. Если же $0 < p < 1$, то всякая функция класса V_p сингулярна (результат Винера). Поэтому наибольший интерес представляет случай $1 < p < \infty$. Функции класса V_p ($1 \leq p < \infty$), как было показано Винером, могут иметь лишь разрывы первого рода.

Напомним определение дробного интеграла Вейля порядка α периодической функции с нулевым средним значением по периоду (см., например, [3]):

$$I_{\pm}^{(\alpha)} x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t-s) \Psi_{\pm}^{(\alpha)}(s) ds, \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

где $\Psi_{\pm}^{(\alpha)}(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(kt \mp \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^{\alpha}}$.

Дробная производная Вейля порядка $0 < \alpha < 1$ для таких же функций определяется равенством

$$D_{\pm}^{(\alpha)} x = \pm \frac{d}{dt} I_{\pm}^{(1-\alpha)} x.$$

В [4] описываются условия, при которых дробная производная Вейля будет сохранять свойство почти периодичности функции. Используется определение Бора почти периодичности функции и для семейств равностепенно почти периодических функций с нулевым

средним значением по почти периоду приводится теорема о дробной производной Вейля:

Теорема 1. Пусть $x(t)$ – функция, принадлежащая пространству L_{ap} с нулевым средним значением по почти периоду. Тогда дробная производная по Вейлю порядка α ($0 < \alpha < 1$) $D_{\pm}^{(\alpha)}x$ также является почти периодической функцией.

Сделаем попытку ослабить условия на функцию. Рассмотрим почти периодические функции ограниченной p -вариации (вместо равномерно непрерывных). В [2] показано, что функции класса V_p^α (функции, производная Вейля порядка α которых принадлежит классу V_p) могут быть приближены в лебеговской метрике L_q суммами Фурье S_n с точностью до $n^{-\alpha-\frac{1}{q}}$ с учетом коэффициента, равного модулю суммы последовательности скачков функции на периоде. Поскольку метрика пространств L_q не «видит» разницы между функциями, отличающимися значениями на множестве меры нуль, можно рассматривать факторпространство, например, по функциям с нулевой мерой на почти периоде.

Учитывая вышесказанное, свойства интеграла Вейля, возможность непрерывного приближения суммами Фурье рассматриваемых функций, а также [5], можно провести рассуждения, аналогичные [4] для установления утверждения о сохранении свойств почти периодичности для функций ограниченной p -вариации при дифференцировании по Вейлю:

Теорема 2. Пусть $x(t)$ – почти периодическая функция ограниченной p -вариации, принадлежащая пространству V_p^α с нулевой мерой. Тогда дробная производная по Вейлю порядка α ($0 < \alpha < 1$) $D_{\pm}^{(\alpha)}x$ также является почти периодической функцией.

Будет ли всегда сохраняться свойство ограниченной p -вариации при таком преобразовании? Предположительно, нет в общем случае. Ответ на этот вопрос нам пока неизвестен.

Отметим также, что в определении (3) для рассматриваемых функций 2π заменяется на длину почти периода для соответствующего семейства функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wiener N., The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, Massachusetts J. Math., 3 (1924), 72–94.
2. Б.И. Голубов, О функциях ограниченной p -вариации, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, том 32, выпуск 4, 837–858
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
4. Пономарева, С.В. Дробная производная Вейля почти периодических функций / С. В. Пономарева, О. Н. Пыжкова // Информационные технологии. Физика и математика: материалы 88-й науч.-техн. конф. профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 29 января – 16 февраля 2024 г. – Минск: БГТУ, 2024. – С. 298-301.
5. Левитан Б.М. Почти-периодические функции / Б.М. Левитан. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 396 с.

УДК 517.977

Н.М. Дмитрук, канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой
(БГУ, г. Минск)

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ В КЛАССЕ МНОГОКРАТНО ЗАМЫКАЕМЫХ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ

1. Рассматривается задача построения множеств управляемости для стационарной линейной системы с возмущениями, т.е. множеств начальных состояний, из которых систему можно перевести с гарантией на заданное терминальное множество за фиксированное время. Задача исследуется в специальном классе управлений – многократно замыкаемых стратегий [1], которые строятся в предположении о том, что в некоторые наперед заданные будущие моменты времени состояние системы с возмущением станет известным, и можно будет построить новое управление на промежутке до поступления следующего измерения состояния. Кроме того, исследуется задача построения множеств управляемости, все состояния обеспечивают гарантированное значение линейного терминального критерия качества не хуже некоторого заданного.

2. Рассмотрим линейную дискретную систему

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (1)$$