УДК 517.962.2

В.В. Крахотко, доц., канд. физ.- мат. наук;
В.В. Горячкин, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск);
В.В. Игнатенко, доц., канд. физ.- мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим распределённую дискретную систему [1] вида

$$
\begin{aligned}
&x(t_1+1,t_2,t_3)=A_1x(t_1,t_2,t_3)+D_1y(t_1,t_2,t_3)+B_1u(t_1,t_2,t_3),\\
&x(t_1,t_2+1,t_3)=A_2x(t_1,t_2,t_3)+D_2y(t_1,t_2,t_3)+B_2u(t_1,t_2,t_3),\\
&y(t_1,t_2,t_3+1)=A_3x(t_1,t_2,t_3)+D_3y(t_1,t_2,t_3)+B_3u(t_1,t_2,t_3),\\
&t_i\in N\bigcup\{0\}, i=\overline{1,3},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $x\in R^n, y\in R^m, u\in R^r, A_i, D_i, B_i, \overline{1,3}$ – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Для системы (1) зададим начальные условия

$$
x(0,0,t_3)=\alpha(t_3),\ y(t_1,t_2,0)=\varphi(t_1,t_2),\ t_i\in N\bigcup\{0\},\ i=\overline{1,3}. \tag{2}
$$

Требуется построить решение системы (1) при начальных условиях (2). Понятно, что при этих начальных условиях решение системы (1) будет неединственным. Если записать решение системы (1) при начальных условиях (2) в явном виде, то придем к громоздким произведениям и сумме матриц,

задающих систему (1). Поэтому для компактности записи решения системы (1) введем понятие системы определяющих уравнений [2].

Для этого рассмотрим соответствия:

$$
x(t_1,t_2,t_3)\to X_{t_1\,t_2\,t_3},\ y(t_1,t_2,t_3)\to Y_{t_1\,t_2\,t_3}, u(t_1,t_2,t_3)\to U_{t_1\,t_2\,t_3}, \tag{3}
$$

где $X_{t_1\,t_2\,t_3}$ – $n\times n$ $Y_{t_1\,t_2\,t_3}$ – $m\times n$, $U_{t_1\,t_2\,t_3}$ – $r\times r$ матрицы.

В соответствии с обозначениями (3) построим по системе (1) систему определяющих уравнений

$$
\begin{aligned}
&X_{t_1+1\,t_2\,t_3}=A_1X_{t_1\,t_2\,t_3}+D_1Y_{t_1\,t_2\,t_3}+B_1U_{t_1\,t_2\,t_3},\\
&X_{t_1\,t_2+1\,t_3}=A_2X_{t_1\,t_2\,t_3}+D_2Y_{t_1\,t_2\,t_3}+B_2U_{t_1\,t_2\,t_3},\\
&Y_{t_1\,t_2\,t_3+1}=A_3X_{t_1\,t_2\,t_3}+D_3Y_{t_1\,t_2\,t_3}+B_3U_{t_1\,t_2\,t_3},\\
&t_i\in Z, i=\overline{1,3}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Для построенной системы определяющих уравнений (4) рассмотрим три группы решений при различных начальных условиях:

$$X^{(1)}_{t_1\,t_2\,t_3} \quad \begin{pmatrix} X_{1\,0\,0}=E_n,\, X_{0\,t_2\,t_3}=0,\, Y_{t_1\,t_2\,0}=0,\, U_{t_1\,t_2\,t_3}=0, \forall t_i\in Z,\, i=\overline{1,3}; \\ X_{t_1\,t_2\,t_3}=0,\, Y_{t_1\,t_2\,t_3}=0,\, t_i\in Z^-=\left\{t_i\in Z, t_i<0, i=\overline{1,3},\right\} \end{pmatrix}$$
$$Y^{(1)}_{t_1\,t_2\,t_3}$$

$$X^{(2)}_{t_1\,t_2\,t_3} \quad \begin{pmatrix} X_{\,0\,0\,t_3}=0,\, Y_{0\,0\,1}=E_m,\, Y_{t_1\,t_2\,0}=0,\, U_{t_1\,t_2\,t_2}=0, \forall t_i\in Z,\, i=\overline{1,3}; \\ X_{t_1\,t_2\,t_3}=0,\, Y_{t_1\,t_2\,t_3}=0, \forall t_i\in Z^-,\, i=\overline{1,3}. \end{pmatrix}$$
$$Y^{(2)}_{t_1\,t_2\,t_3}$$

$$X^{(3)}_{t_1\,t_2\,t_3} \quad \begin{pmatrix} U_{0\,0\,0}=E_r,\; U_{t_1\,t_2\,t_2}=0, \forall t_i\in Z^-,\, i=\overline{1,3};\; X_{0\,0\,t_3}=0, Y_{t_1\,t_2\,0}=0, \\ \forall t_i\in Z,\, i=\overline{1,3};\, X_{t_1\,t_2\,t_3}=0,\, Y_{t_1\,t_2\,t_2}=0,\, t_i\in Z^-, i=\overline{1,3}. \end{pmatrix}$$
$$Y^{(3)}_{t_1\,t_2\,t_3}$$

Справедливо утверждение.

Теорема. Если для дискретной системы (1) выполняются следующие условия:

1) Матрицы A_1 и A_2 перестановочные;
2) $X^{(1)}_{t_1+1\;t_2\;t_3} = X^{(1)}_{t_1\;t_2+1\;t_3}$;
3) $X^{(2)}_{t_1+1\;t_2\;t_3}\varphi(\overline{t}_1+1,\overline{t}_2) = X^{(2)}_{t_1\;t_2+1\;t_3}\varphi(\overline{t}_1,\overline{t}_2+1)$;
4) $X^{(3)}_{t_1+1\;t_2\;t_3}u(\overline{t}_1+1,\overline{t}_2,\overline{t}_3) = X^{(3)}_{t_1\;t_2+1\;t_3}u(\overline{t}_1,\overline{t}_2+1,\overline{t}_3)$,

то существует единственное решение системы (1) с начальными условиями (2) и оно представимо в виде

$$x(t_1,t_2,t_3)=\sum_{i=0}^{t_3}X^{(1)}_{t_1+1\;t_2\;i}\,\alpha(t_3-i)+\sum_{i=0}^{t_1}\left(\sum_{j=0}^{t_2}-\sum_{j=i+1}^{t_2}\right)X^{(2)}_{t_1-i\;\;t_2-j\;t_3+1}\varphi(i,j)+$$
$$+\sum_{i=0}^{t_1}\sum_{j=0}^{t_2-1}\sum_{k=0}^{t_3}X^{(3)}_{t_1-i\;\;t_2-j\;t_3-k}\,u(i,j,k); \tag{5}$$

$$y(t_1,t_2,t_3)=\sum_{i=0}^{t_3}Y^{(1)}_{t_1+1\;t_2\;t_3-i}\,\alpha(i)+\sum_{i=0}^{t_1}\left(\sum_{j=0}^{t_2}-\sum_{i=i+1}^{t_2}\right)Y^{(2)}_{i\;\;j\;t_3+1}\varphi(t_1-i,t_2-j)+$$
$$+\sum_{i=0}^{t_1}\left(\sum_{i=0}^{t_2}-\sum_{i=i+1}^{t_2}\right)Y^{(3)}_{i\;\;j\;t_3-k}u(t_1-i,t_2-j,k). \tag{6}$$

Доказательство производится непосредственной подстановкой (5), (6)в систему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2001.– 400 с.

2. Габасов.Р., Кириллова Ф.М., Крахотко В.В., Минюк С.А. Теория управляемости линейных дискретных систем. I. Определяющее уравнение. Дифференциальные уравнения. Т.VIII №5, 1972. – С. 767-773.