УДК 517.444

Л.Д. Яроцкая, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

# К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ СВЁРТОЧНОГО МЕТОДА ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ

Концепция свёртки весьма эффективно находит свои приложения, позволяя дать решения ряда задач в замкнутом виде. В работе [1] разработан метод построения композиционных свёрток $(f * g)$ двух функций $f$ и $g$ как операции умножения в некоторой алгебре, когда с помощью действия соответствующего оператора $A$ на свертку приходят к умножению образов, определенному равенством вида

$$A[f * g] = A[f]A[g]. \tag{1}$$

Если при некоторых условиях имеет смысл обратный оператор от произведения функций, то свёртку можно определить в некотором функциональном пространстве равенством

$$(f * g) = A^{-1}\left(A[f]A[g]\right). \tag{2}$$

Наиболее изученные преобразования функции f, например, преобразования Лапласа, Ханкеля, Стилтьеса, Мейера, синус- и косинус-преобразования Фурье и другие преобразования с наиболее общими специальными функциями гипергеометрического типа, которые находят свое успешное применение в различных областях математики, имеют структуру свёртки Меллина, а именно

$$[K](x) = \int_0^\infty k\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\frac{dy}{y}. \tag{3}$$

Отметим, что наиболее эффективным инструментом для изучения и применения преобразований типа свёртки (3) является равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty k\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\frac{dy}{y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} k^*(s) f^*(s) x^{-s} ds, \tag{4}$$

где $k^*(s)$, $f^*(s)$ – преобразование Меллина функций $k, f$, определяемое формулой

$$k^*(s) = \int_0^\infty k(y) y^{s-1} dy, \quad f^*(s) = \int_0^\infty f(y) y^{s-1} dy. \tag{5}$$

Так для ядер гипергеометрического типа [2] справедливо иметь своим преобразованием Меллина (5) отношение произведений гамма-функций от s на постоянные

$$\prod_{i,j,k,l} \frac{\Gamma(a_i+s)\Gamma(b_j-s)}{\Gamma(c_k+s)\Gamma(d_l-s)},$$

где

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-y}y^{s-1}dy, \quad s>0, \tag{6}$$

– гамма-функция Эйлера [2], асимптотика которой в соответствии с формулой Стирлинга имеет степенно-экспоненциальный характер. Это, в свою очередь, позволяет изучать в совокупности интегралы и интегральные преобразования в пространствах $L_p$ со степенно-экспоненциальным весом и получать формулы обращения непосредственно исходя из равенства (4).

В работе [3] разработан метод, позволяющий вычислять определенны интегралы от различных элементарных и специальных функций, которые могут быть приведены к виду (3), где $k$ и $f$ – функции, представленные в левых частях строк базовой таблицы преобразования Меллина [3] или в справочнике [4]. Для получения значения $[K](x)$ этого интеграла достаточно осуществить следующие операции:

1. Перемножить образы $k^*(s)$, $f^*(s)$ функций $k$ и $f$

$$k^*(s)f^*(s)=K^*(s), \tag{7}$$

которые находятся из правых частей соответствующих строк и являются преобразованиями Меллина (6) от оригиналов $k$ и $f$.

2. Для составленного таким образом произведения (7) следует вычислить оригинал $[K](x)$, также связанный с $K^*(s)$ формулой преобразования Меллина (5). Функция $[K](x)$ выразит искомое значение интеграла.

Оригинал $[K](x)$ восстанавливается по известному значению своего образа $K^*(s)$ с помощью теоремы Слейтер (строка 12.38 таблицы §10 [3]), а в более сложных случаях для этого применяется теория вычетов. Функция $[K](x)$ выражается, вообще говоря, в виде комбинации обобщенных гипергеометрических рядов [2]. Ограничения на параметры, обеспечивающие сходимость исходного интеграла, получаются автоматически из условий существования таких общих $s$, для которых оба интеграла преобразования Меллина функций $k^*(s)$, $f^*(s)$

сходятся.
Пример. Вычислим интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}-y} y^{\nu-1} dy = K(x), \quad x > 0. \tag{8}$$

Положим $k(t) = e^{-t}$, $f(t) = e^{-t} t^{\nu}$. Образом первой функции является гамма-функция (6). Образ второй функции

$$f^*(s) = \int_0^\infty \left(e^{-y} y^{\nu}\right) y^{s-1} dy = \int_0^\infty e^{-y} y^{(s+\nu)-1} dy = \Gamma(s+\nu), \quad \mathrm{Re}(s+\nu) > 0.$$

Перемножив эти образы

$$K^*(s) = k^*(s) f^*(s) = \Gamma(s)\Gamma(s+\nu),$$

найдем прообраз полученного произведения из строки 9.3 (1) §10 [3] через известную функцию Макдональда $K_\nu(z)$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}-y} y^{\nu-1} dy = 2x^{\nu/2} K_\nu\left(2\sqrt{x}\right), \quad x > 0.$$

Интеграл сходится при любом *v*, если $x > 0$.
Аналогичные методы применимы для свёрток Фурье

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty f(x-y) g(y) dy.$$

Отметим, что концепция свёртки применима и для дискретных функций и используется в смежных вопросах, связанных с суммированием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yakubovich S. B. Index transforms. – Singapore: World Scientific Publishing Company, 1996. 252 p.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М., «Наука», 1973. 296 с.
3. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). – Мн., «Наука и техника», 1978. 312 с.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., «Наука», 1986. 800 с.