УДК 517.977

И.М. Борковская, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Задача стабилизации динамических систем является одной из важнейших задач в качественной теории управления. С помощью воздействия регулятора, построенного по принципу обратной связи, необходимо обеспечить устойчивость замкнутой системы. Изучение качественных свойств систем с запаздыванием представляет особый интерес. Примерами таких систем могут служить транспортные, коммуникационные системы, системы, описывающие химические процессы, системы окружающей среды и энергетические системы. В докладе исследуются условия, при которых система третьего порядка с запаздыванием стабилизируема регулятором, не выводящим систему за пределы рассматриваемого класса. Предлагаются способы выбора регулятора, обеспечивающего устойчивость рассматриваемой системы.

Пусть система с запаздыванием имеет вид:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + bu(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n, b \in R^n, t > 0, A, A_1 -$матрицы соответствующих размеров, $h > 0$ - постоянное запаздывание, $u(t) \in R-$ управляющее воздействие. Чтобы движение системы было определенным для $t \geq 0$, зададим начальные условия: $x(t) = \varphi(t), -h \leq t < 0, x(0) = x_0,$ где $\varphi(t)$ - непрерывная функция, $x_0 -$ n-вектор.

Введем регулятор

$$u(t) = q_0{}' x(t) + q_1' x(t-h) \tag{2}$$

не выводящий систему за пределы рассматриваемого класса ($q_0, q_1 -$ n-векторы).

Систему (1) назовем стабилизируемой, если существует регулятор вида (2), при котором корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$\det\left[\lambda E - A - A_1 e^{-\lambda h} - b\left(q_0' + q_1' e^{-\lambda h}\right)\right] = 0$$

имеют отрицательные действительные части.

Исследуем возможность стабилизации системы третьего порядка вида (1), когда $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $A_1=\begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{bmatrix}$.

Регулятор (2) будет иметь вид:

$$u(t)=\left[q_{01}\ q_{02}\ q_{03}\right]x(t)+\left[q_{11}\ q_{12}\ q_{13}\right]x(t-h).$$

Запишем характеристический квазиполином системы (1), замкнутой регулятором вида (2):

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-a_{11}-a_{11}^1e^{-\lambda h} & -a_{12}-a_{12}^1e^{-\lambda h} & -a_{13}-a_{13}^1e^{-\lambda h} \\ -a_{21}-a_{21}^1e^{-\lambda h} & \lambda-a_{22}-a_{22}^1e^{-\lambda h} & -a_{23}-a_{23}^1e^{-\lambda h} \\ -a_{31}-a_{31}^1e^{-\lambda h}-\tilde{q}_1 & -a_{32}-a_{32}^1e^{-\lambda h}-\tilde{q}_2 & \lambda-a_{33}-a_{33}^1e^{-\lambda h}-\tilde{q}_3 \end{bmatrix}=$$

$$=\left(\lambda-a_{11}-a_{11}^1e^{-\lambda h}\right)[\left(\lambda-a_{22}-a_{22}^1e^{-\lambda h}\right)\left(\lambda-a_{33}-a_{33}^1e^{-\lambda h}-\tilde{q}_3\right)-$$
$$-\left(a_{32}+a_{32}^1e^{-\lambda h}+\tilde{q}_2\right)\left(a_{23}+a_{23}^1e^{-\lambda h}\right)]+\left(a_{12}+a_{12}^1e^{-\lambda h}\right)[\left(-a_{21}-a_{21}^1e^{-\lambda h}\right)\times$$
$$\times\left(\lambda-a_{33}-a_{33}^1e^{-\lambda h}-\tilde{q}_3\right)-\left(a_{31}+a_{31}^1e^{-\lambda h}+\tilde{q}_1\right)\left(a_{23}+a_{23}^1e^{-\lambda h}\right)]+$$
$$+\left(-a_{13}-a_{13}^1e^{-\lambda h}\right)[\left(a_{21}+a_{21}^1e^{-\lambda h}\right)\left(a_{32}+a_{32}^1e^{-\lambda h}+\tilde{q}_2\right)+\left(a_{31}+a_{31}^1e^{-\lambda h}+\tilde{q}_1\right)\times$$
$$\times\left(\lambda-a_{22}-a_{22}^1e^{-\lambda h}\right)],$$

где $\tilde{q}_1=q_{01}+q_{11}e^{-\lambda h}$, $\tilde{q}_2=q_{02}+q_{12}e^{-\lambda h}$, $\tilde{q}_3=q_{03}+q_{13}e^{-\lambda h}$.

Выберем $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{q}_3$ таким образом, чтобы характеристический квазиполином распался на 3 множителя. Пусть

$$\tilde{q}_1=-a_{21}-a_{31}-a_{21}^1e^{-\lambda h}-a_{31}^1e^{-\lambda h},$$
$$\tilde{q}_2=a_{23}-a_{32}+a_{23}^1e^{-\lambda h}-a_{32}^1e^{-\lambda h},$$
$$\tilde{q}_3=-a_{33}+a_{22}-a_{33}^1e^{-\lambda h}+a_{22}^1e^{-\lambda h}.$$

Потребуем также, чтобы выполнялись равенства: $a_{13}=-a_{12}, a_{13}^1=-a_{12}^1$. Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид:

$$\left(\lambda-a_{11}-a_{11}^{1}e^{-\lambda h}\right)\left(\left(\lambda-a_{22}-a_{22}^{1}e^{-\lambda h}\right)^{2}-\left(a_{23}+a_{23}^{1}e^{-\lambda h}\right)^{2}\right)=0,$$

$$\left(\lambda-a_{11}-a_{11}^{1}e^{-\lambda h}\right)\left(\lambda-a_{22}-a_{22}^{1}e^{-\lambda h}-a_{23}-a_{23}^{1}e^{-\lambda h}\right)\times$$
$$\times\left(\lambda-a_{22}-a_{22}^{1}e^{-\lambda h}+a_{23}+a_{23}^{1}e^{-\lambda h}\right)=0,$$

$$\left(\lambda-a_{11}-a_{11}^{1}e^{-\lambda h}\right)\times$$
$$\times\left(\lambda+(-a_{22}-a_{23})+(-a_{22}^{1}-a_{23}^{1})e^{-\lambda h})(\lambda+(-a_{22}+a_{23})+(-a_{22}^{1}+a_{23}^{1})e^{-\lambda h}\right)=0.$$

Воспользуемся следующей леммой:
Лемма. Пусть α,β – действительные числа, Тогда корни уравнения

$$\lambda+\alpha+\beta e^{-\lambda h}=0$$

имеют только отрицательные действительные части в том и только в том случае, если точка (α,β) принадлежит области устойчивости Ω, граница которой описывается формулами:

$$\beta=-\alpha,\ \begin{cases}\alpha+\beta\cosh g=0,\\ g-\beta\sinh g=0,\end{cases}\quad 0<g<\frac{\pi}{h}.$$

Получаем следующее достаточное условие стабилизируемости:

Утверждение. Система третьего порядка с запаздыванием вида (1) стабилизируема регулятором (2), если выполняются следующие условия:

1. $a_{13}=-a_{12},\, a_{13}^{1}=-a_{12}^{1}.$
2. $\left(-a_{11},-a_{11}^{1}\right)\in\Omega,\left(-a_{22}-a_{23},-a_{22}^{1}-a_{23}^{1}\right)\in\Omega,$
   $\left(-a_{22}+a_{23},-a_{22}^{1}+a_{23}^{1}\right)\in\Omega,$

где Ω – область устойчивости для корней уравнения
$\lambda+\alpha+\beta e^{-\lambda h}=0.$