8.4 Подсекция "ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА,ФИЗИЧЕСКАЯ ОСНОВЫ СОЗДАНИЯ НОВЫХ МАТЕРИАЛОВ И ТЕХНОЛОГИЙ"

УДК 517.977

А.А. Якименко, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ О МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ С ПЯТЬЮ СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и пятью соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=0}^{5}A_jx(t-jh)+bu(t), \qquad (1)$$

где $A_j,\ j=0,1,2,3,4,5$ – постоянные (2×2)-матрицы; $h>0$ – постоянное запаздывание; b – постоянный 2-вектор; u – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что $b'=(0\ 1)$ (штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\det\left[\lambda I_2-\sum_{i=0}^{5}A_ie^{-i\lambda h}\right]\equiv\lambda^2+$$

$$+\left(\alpha_{10}+\alpha_{11}e^{-\lambda h}+\alpha_{12}e^{-2\lambda h}+\alpha_{13}e^{-3h}+\alpha_{14}e^{-4h}+\alpha_{15}e^{-5h}\right)\lambda+$$

$$+\alpha_{00}+\alpha_{01}e^{-\lambda h}+\alpha_{02}e^{-2\lambda h}+\alpha_{03}e^{-3\lambda h}+\alpha_{04}e^{-4\lambda h}+$$

$$+\alpha_{05}e^{-5\lambda h}+\alpha_{06}e^{-5\lambda h}+\alpha_{07}e^{-7\lambda h}+\alpha_{08}e^{-8\lambda h}+$$

$$+\alpha_{09}e^{-9\lambda h}+\alpha_{10}e^{-10\lambda h}=0 \qquad (2)$$

где $\lambda\in\mathbb{C},\ e^{-j\lambda h}$ – оператор сдвига ($e^{-i\lambda h}x(t)\equiv x(t-ih)$).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t)=\sum_{i=0}^{M}q_i'x(t-ih)+\int_{-lh}^{0}g'(s)x(t+s)ds, \qquad (3)$$

где $l, M \in \mathbb{N}$, q_j, $j = 0, 1, \ldots, M$ – 2-векторы; $g(s)$, $s \in [-h, 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция.

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda) = \sum_{j=0}^{M} q'_j e^{-j\lambda h} + G(\lambda), \tag{4}$$

где $G(\lambda)$ – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}, i = 0, j = \overline{0, 10}$; $i = 1$, $j = \overline{0, 5}$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (сравните с формулой (2)):

$$\det\left[\lambda I_2 - \sum_{i=0}^{5} A_i e^{-i\lambda h} - bU(\lambda)\right] \equiv \lambda^2 +$$

$$+\left(\tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11}e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{12}e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{13}e^{-3h} + \tilde{\alpha}_{14}e^{-4h} + \tilde{\alpha}_{15}e^{-5h}\right)\lambda +$$

$$+ \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01}e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{02}e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{03}e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{04}e^{-4\lambda h} +$$

$$+ \tilde{\alpha}_{05}e^{-5\lambda h} + \tilde{\alpha}_{06}e^{-6\lambda h} + \tilde{\alpha}_{07}e^{-7\lambda h} + \tilde{\alpha}_{08}e^{-8\lambda h} +$$

$$+\tilde{\alpha}_{09}e^{-9\lambda h} + \tilde{\alpha}_{10}e^{-10\lambda h} = 0.$$

Пусть

$$\mu_1 = \sum_{i=0}^{5} \tilde{\alpha}_{1i} m^i; \tag{5}$$

$$\mu_2 = \sum_{i=0}^{10} \tilde{\alpha}_{0i} m^i, \tag{6}$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}, i = 0, j = \overline{0, 10}$; $i = 1, j = \overline{0, 5}$ – произвольные числа. Тогда система (1), замкнутая регулятором, решающим задачу модального управления, имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \mu_1\lambda + \mu_2 = 0. \tag{7}$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига ($mx(t) = x(t-h)$), $A(m) = \sum_{i=0}^{5} A_i m^i$. Не ограничивая общности, можно считать, что матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{5} a_i m^i & \sum_{i=0}^{4} b_i m^i + m^5 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$a_{21}(m)=\sum_{i=0}^{5}a_{21i}m^i;\ a_{22}(m)=\sum_{i=0}^{5}a_{22i}m^i. \tag{8}$$

В данном докладе рассмотрим случай

$$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=0. \tag{9}$$

Тогда матрица $A(m)$ примет вид

$$A(m)=\begin{bmatrix} a_0 & \sum_{i=0}^{4}b_im^i+m^5 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix}.$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, в частотной области можно взять в виде:

$$u_1(\lambda, m)=-\frac{a_0^2+a_0\mu_1+\mu_2}{b_0+b_1k+b_2k^2+b_3k^3+b_4k^4+k^5}-a_{21}(m); \tag{10}$$

$$\begin{gathered} u_2(\lambda, m)=-a_0-\mu_1-a_{22}(m)+ \\ \frac{\left(a_0^2+\mu_1a_0+\mu_2\right)}{b_0+b_1k+b_2k^2+b_3k^3+b_4k^4+k^5}\times \\ \times\Big(k^4+(m+b_4)k^3+\left(m^2+b_4m+b_3\right)k^2+ \\ +\left(m^3+b_4m^2+b_3m+b_2\right)k+m^4+b_4m^3+ \\ +b_3m^2+b_2m+b_1\Big)\times\frac{(m-k)}{\lambda-a_0}. \end{gathered} \tag{11}$$

где $k=e^{-a_0h}$. Для того, чтобы регуляторы (10), (11) имели смысл, необходимо и достаточно выполнения условия:

$$b_0+b_1k+b_2k^2+b_3k^3+b_4k^4+k^5\neq 0. \tag{12}$$

Таким образом, справедлива

Теорема. Для того чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (3) в случае (9), необходимо и достаточно выполнения условия (12). При этом регуляторы, решающие задачу модального управления, в частотной области имеют вид (10), (11).

Пример. Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$A_0=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ a_{210} & a_{220} \end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{211} & a_{221} \end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ a_{212} & a_{222} \end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ a_{213} & a_{223} \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ a_{214} & a_{224} \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{215} & a_{225} \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) =$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 + m + 2m^2 + 3m^3 + 5m^4 + m^5 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$a_{21}(m) = \sum_{i=0}^{5} a_{21i} m^i;$$
$$a_{22}(m) = \sum_{i=0}^{5} a_{22i} m^i.$$

Обозначим $k = e^{-a_0 h} = e^{-2h} \in \mathbb{R}$. Проверим выполнение условия (18):

$$b_0 + b_1 k + b_2 k^2 + b_3 k^3 + b_4 k^4 + k^5 =$$
$$= 4 + e^{-2h} + 2e^{-4h} + 3e^{-8h} + 5e^{-16h} + e^{-32h} > 0.$$

Условие (18) выполнено. Тогда регуляторы (19), (20) примут вид

$$u_1(\lambda, m) = -\frac{4 + 2\mu_1 + \mu_2}{4 + e^{-2h} + 2e^{-4h} + 3e^{-8h} + 5e^{-16h} + e^{-32h}} -$$
$$-\sum_{i=0}^{5} a_{21i} m^i;$$

$$u_2(\lambda, m) = -2 - \mu_1 - \sum_{i=0}^{5} a_{22i} m^i +$$
$$+\frac{(4 + 2\mu_1 + \mu_2)}{4 + e^{-2h} + 2e^{-4h} + 3e^{-8h} + 5e^{-16h} + e^{-32h}} \times$$
$$\times \Big(e^{-16h} + m^4 + 5m^3 + 3m^2 + 2m + 1 +$$
$$+ k\left(m^3 + 5m^2 + 3m + 2\right) + k^2\left(m^2 + 5m + 3\right) +$$
$$+ k^3(m + 5)\Big) \times \frac{\left(m - e^{-2h}\right)}{\lambda - 2}.$$

Нетрудно проверить, что система (1), замкнутая этим регулятором, имеет характеристическое уравнение вида

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0,$$

где μ_1, μ_2 определены в формулах (5), (6).