

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## THEORETICAL MECHANICS

---

УДК 531.382

**Т. Б. Карлович, А. Л. Наркевич**

Белорусский государственный технологический университет

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЛЧКА ТИП-ТОП ПРИ ЕГО АВТОМАТИЗИРОВАННОМ РАСКРУЧИВАНИИ

Волчок тип-топ уже не одно десятилетие является объектом пристального внимания теоретиков и экспериментаторов благодаря эффектному перевороту на  $180^\circ$  во время своего движения. Раскручивание волчка может осуществляться как вручную, так и автоматизированным способом. Автоматизированный запуск имеет ряд преимуществ перед раскручиванием вручную: достигается большая скорость раскручивания, которая может регулироваться в широком диапазоне значений; ось вращения волчка близка к вертикальному положению; исключаются случайные факторы запуска, присутствующие при ручном раскручивании.

В работе для автоматизированного запуска волчка используется устройство с полым ротором электродвигателя, позволяющее раскручивать волчок за ножку, а затем выталкивать его на горизонтальную поверхность. Получающиеся при этом траектории движения волчка записываются на видеокамеру, а затем при помощи раскадровки видеоролика восстанавливается след точки касания волчком горизонтальной плоскости.

Для детального изучения траекторий движения волчка на горизонтальной поверхности манежа применялась разметка графитовым грифелем, после чего у волчка исчезала способность к перевороту. Данное явление интерпретируется в статье на основе уменьшения трения между контактирующими поверхностями и наличием нижнего граничного значения у силы трения, начиная с которого возможен переворот на  $180^\circ$ .

В теоретическом описании переворота волчка на основе нелинейных динамических уравнений это значение силы трения отсутствует.

**Ключевые слова:** механическая система, волчок тип-топ, уравнения нелинейной динамики, сила трения, интеграл Джелетта.

**Для цитирования:** Карлович Т. Б., Наркевич А. Л. Экспериментальное исследование движения волчка тип-топ при его автоматизированном раскручивании // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2026. № 1(302). С. 27–34.

DOI: 10.52065/2520-6141-2026-302-3.

**T. B. Karlovich, A. L. Narkevich**  
Belarusian State Technological University

### EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF A TIP-TOP MOTION DURING ITS AUTOMATED SPIN

The tip-top has been the subject of intense interest among theorists and experimenters for decades, thanks to its spectacular 180-degree rotation during its spin. The spinning top can be launched either manually or automated. Automated spinning offers several advantages over manual spinning: it achieves a higher spinning speed, which can be adjusted over a wide range; the spinning axis is close to vertical; and accidental triggering factors, which are common either manual spinning, are eliminated.

In the automated spinning system, a device with a hollow rotor driven by an electric motor is used to spin the spinning top by its stem and then push it onto a horizontal surface. The resulting trajectories of the spinning top are recorded on a video, and then, using a camcorder, the point of contact between the spinning top and the horizontal plane is reconstructed.

To study the top's trajectories in detail, graphite pencil marks were used on the horizontal surface of the arena. Afterward, the top's ability to flip was observed to disappear. This phenomenon is interpreted in the article based on the reduction in friction between the contacting surfaces and the existence of a lower limit for the friction force, above which a 180-degree flip is possible.

In the theoretical description of the top's motion based on nonlinear dynamic equations there is no boundary value of the friction force.

**Keywords:** mechanical system, dynamically symmetrical body, momentum, kinetic moment, Jellett integral.

**For citation:** Karlovich T. B., Narkevich A. L. Experimental investigation of a tip-top motion during its automatic spin. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2026*, no. 1(302), pp. 27–34 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2026-302-3.

**Введение.** Одной из нелинейных задач динамики, имеющих простую экспериментальную реализацию, является задача о движении волчка тип-топ по горизонтальной поверхности. Раскрученный до определенной скорости волчок тип-топ во время движения может переворачиваться на  $180^\circ$ , вращаясь в положении неустойчивого равновесия длительный период времени. В работе [1] использовался сферический волчок с аксиальной симметрией и перемещающимся центром тяжести относительно центра сферы. В экспериментах было показано существование трех режимов вращения волчка: 1) с переворотом на  $180^\circ$ ; 2) без переворота; 3) с наклонным вращением в соответствии с теоретическими предсказаниями в работе [2]. В недавней статье [3] исследовались траектории движения волчка, состоящего из усеченной сферической оболочки и ножки, после его ручного раскручивания. На основе экспериментов была выполнена визуализация траекторий движения и продемонстрировано движение волчка по скручивающейся спирали после переворота на ножку. При этом максимальный радиус закручивания спирали оказался значительно большим, чем теоретически предсказывалось в статье [4].

В настоящей работе нами рассматриваются особенности движения волчка тип-топ при его автоматизированном раскручивании до больших угловых скоростей и последующем выталкивании на горизонтальную поверхность из раскручивающего устройства.

**Экспериментальная часть.** Для эксперимента волчок распечатывался из полилактида на 3D-принтере (рис. 1). Сферическая оболочка (шляпка) толщиной 1 мм и внешним диаметром 38 мм отсекалась приблизительно на  $1/4$  диаметра, чтобы в образовавшееся отверстие можно было вставить ножку и за нее раскручивать волчок. Ножка распечатывалась отдельно в виде усеченного конуса длиной 38 мм с диаметрами 3 мм и 6 мм по торцам. Она устанавливалась с натягом в цилиндрическое отверстие высотой 4 мм внутри сферы.

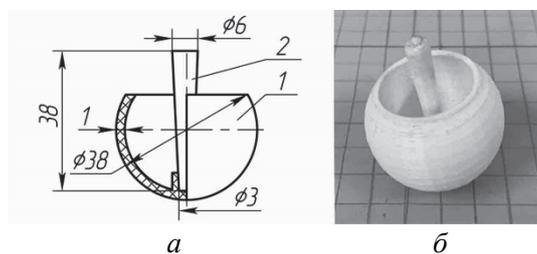


Рис. 1. Волчок:

*a* – схема с размерами; *б* – фото

Готовый волчок использовался в экспериментальной установке, которая приведена на рис. 2. Волчок раскручивался в устройстве 1 и выталкивался из него на поверхность алюминиевого манежа 2 размером  $0,6 \times 0,9$  м, покрытого порошковой краской и расчерченного графитовым грифелем на квадраты размером  $10 \times 10$  мм. Бортики манежа высотой

60 мм с внутренней стороны обкладывались макетным картоном для смягчения ударов волчка о них. Движение волчка записывалось при помощи видеокамеры смартфона (не показан), зафиксированного в селфи-палке 3, прикрепленной к штативу 4.

В качестве устройства для раскручивания использовалось перемешивающее устройство верхнеприводное ПЭ-8300, имеющее полый ротор электродвигателя (рис. 3). В него помещалась трубка длиной 0,3 м, представляющая собой цилиндр с внутренним диаметром 6 мм, которая прочно фиксировалась в патроне устройства. Волчок ножкой устанавливался в нижний конец трубки на глубину 5 мм, в которой он удерживался за счет сил трения. В верхний конец трубки помещался толкатель в виде длинного тонкого стержня длиной не менее 0,3 м и диаметром не более 6 мм.



Рис. 2. Экспериментальная установка:  
1 – устройство для раскручивания волчка;  
2 – манеж; 3 – селфи-палка; 4 – штатив

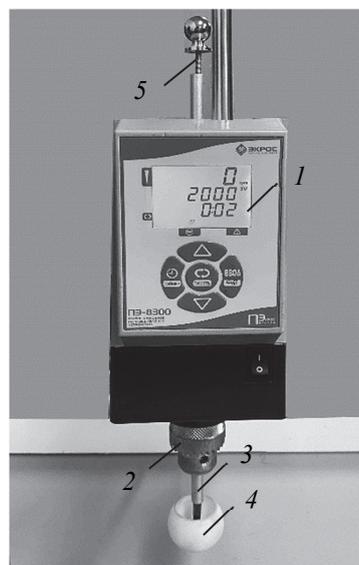


Рис. 3. Перемешивающее устройство ПЭ-800:  
1 – панель управления; 2 – патрон;  
3 – алюминиевая трубка; 4 – волчок;  
5 – толкатель

Примеры использовавшихся толкателей приведены на рис. 4. В ходе экспериментов определили, что толкатели 1–4 должны были вставляться в трубку до начала вращения ротора электродвигателя, а толкатель 5 мог вставляться в трубку как до начала вращения ротора электродвигателя, так и во время его вращения. Для удобства воздействия на толкатель на его верхней части закрепляли упор (толкатели 1–4) или выполняли петлю (толкатель 5).

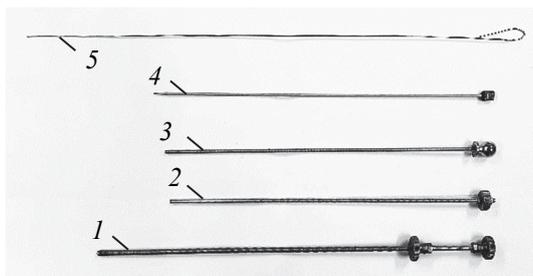


Рис. 4. Толкатели волчка:  
1 – шпилька диаметром 6 мм; 2 – шпилька диаметром 5 мм; 3 – шпилька диаметром 4 мм;  
4 – спица диаметром 3 мм; 5 – проволока вязальная диаметром 1 мм

После достижения заданной скорости вращения ротора, нажимая на упор или петлю толкателя, выталкивали волчок из трубки. Падая с высоты 40 мм, он приземлялся на шляпку и, продолжая вращаться, начинал свое движение по горизонтальной плоскости манежа.

При проведении экспериментов с разными толкателями не было обнаружено существенных изменений в траектории движения волчка. Наиболее удобным для выталкивания оказался толкатель 5 на рис. 4, который и использовался для проведения большинства опытов. Направление вылета волчка из трубки было случайным, а его скорость зависела не только от скорости вращения ротора мешалки, но и от вибрации ротора с амплитудой, достигающей на верхнем конце трубки 2 мм.

Траектории движения волчка на горизонтальной плоскости манежа (рис. 5) визуализировались в экспериментах следующим образом: сначала производилась запись опыта при помощи видеокамеры смартфона, затем осуществлялась раскадровка видеоролика и в каждом кадре отмечались координаты точек касания волчком поверхности (белые точки на рис. 5). После этого все координаты собирались в одном файле и строилась траектория движения волчка.

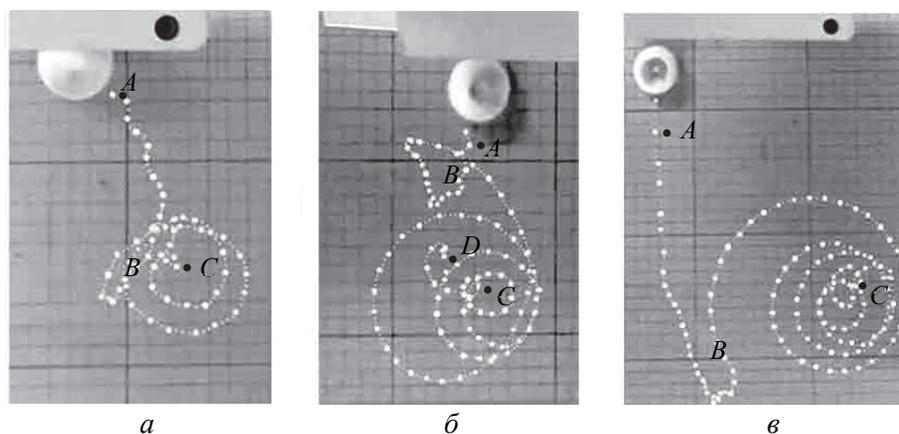


Рис. 5. Траектории движения волчка при различных скоростях вращения ротора мешалки:  
*a* – 2000 об/мин; *б* – 2500 об/мин; *в* – 3000 об/мин

На траекториях точка *A* соответствует точке переворота волчка с шляпки на ножку, область *B* – петлеобразному движению, точка *C* – обратному перевороту волчка с ножки на шляпку

Примеры траекторий при различных скоростях раскручивания волчка приведены на рис. 5, *a*, *б*, *в*. На них показано, что переворот волчка происходит почти мгновенно после начала движения по плоскости манежа (точки *A*), затем волчок начинает петлять (область *B*), разворачиваясь почти на  $180^\circ$  в горизонтальной плоскости, причем форма петли существенно зависит от скорости раскручивания волчка. Так, при скорости 2000 об/мин петля имеет вытянутую форму (рис. 5, *a*), при скорости 2500 об/мин петля принимает форму неправильного треугольника (рис. 5, *б*), а при скорости 3000 об/мин наблюдается П-образный отрезок траектории (рис. 5, *в*). После петлеобразного движения следует движение по скручивающейся спирали. Параметры спирали также оказываются зависимыми от скорости раскручивания: с ее ростом увеличиваются максимальный радиус закручивания спирали и число ее витков (для скорости 2000 об/мин максимальный радиус составляет 30 мм, число витков – 2, для скорости 2500 об/мин максимальный радиус – 50 мм, число витков – 3, для скорости 3000 об/мин – максимальный радиус – 80 мм, число витков – 4).

Когда радиус скручивающейся спирали становится малым, начинается последний этап движения волчка – обратный переворот с ножки на шляпку (точка *C*) и движение по раскручивающейся спирали (отрезок траектории *CD* на рис. 5, *б*, на рис. 5, *a* и 5, *с* не показан).

В отличие от траекторий с ручным раскручиванием волчка, описанных в работе [3], для всех траекторий движения волчка с автоматизированным раскручиванием характерен короткий начальный этап движения на шляпке до переворота на ножку, длинный период вращения на ножке и короткий этап движения после обратного переворота на шляпку.

В экспериментах с автоматизированным раскручиванием волчка наблюдался эффект, связанный с внезапным исчезновением способности волчка переворачиваться при движении по горизонтальной поверхности. В первоначальных опытах до нанесения разметки грифелем на поверхность манежа волчок начинал переворачиваться при скорости раскручивания 2000 об/мин. После нанесения разметки волчок перестал переворачиваться даже при раскрутке со скоростью 3000 об/мин. Этот эффект можно объяснить уменьшением шероховатости поверхности из-за присутствия графита и, соответственно, уменьшением коэффициента трения. Далее поверхность шляпки волчка зачищали шлифовальной шкуркой с зернистостью Р400. После обработки шкуркой волчок вновь приобретал способность переворачиваться на ножку в течение нескольких запусков. Потом способность к перевороту опять исчезала из-за истирания поверхности волчка и налипания на нее частиц графита, и требовалась повторная обработка шкуркой для придания волчку необходимой шероховатости поверхности. Таким образом, можно сделать вывод, что существует нижнее пороговое значение шероховатости взаимодействующих поверхностей (а значит, и коэффициента трения между поверхностями манежа и волчка), начиная с которого возможен переворот при движении волчка.

**Теоретическая часть.** Теоретическое описание движения волчка основано на нескольких моделях трения, включающих как силу, так и момент трения. Общепринятой и наиболее часто используемой является модель вязкого трения, учитывающая силу трения:

$$F_v = -\mu u, \quad (1)$$

где  $F_v$  – сила трения скольжения;  $\mu$  – коэффициент вязкого трения скольжения;  $u$  – скорость точки волчка, которой он касается горизонтальной плоскости, связанная со скоростью движения центра масс волчка  $v$  соотношением:

$$u = v + \omega \times r, \quad (2)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения волчка;  $r$  – радиус-вектор, проведенный из центра масс к точке касания волчком горизонтальной плоскости.

Моментом трения в модели вязкого трения пренебрегают, предполагая его малой величиной [2, 4]. Это позволяет использовать первые интегралы задачи: геометрический интеграл, полную энергию и интеграл Джелетта для нахождения условных экстремумов функции Лагранжа и анализа стационарных решений задачи на устойчивость в аналитическом виде [4, 5]. Получаемые решения делятся на две группы: 1) вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии, которая неподвижна и занимает вертикальное положение (при этом центр тяжести волчка может находиться как выше, так и ниже его геометрического центра); 2) регулярные прецессии волчка вокруг оси симметрии, которая вращается с некоторой угловой скоростью вокруг вертикали. Во всех решениях отсутствует пороговое значение силы трения, а при параметрическом анализе устойчивости вращений с низшим и высшим расположением центра масс используются только геометрические характеристики волчка.

Как указывалось в работе [6], эффект переворота волчка является нестационарным эффектом его перехода из нижнего устойчивого состояния в верхнее неустойчивое состояние, поэтому ограничиваться одним стационарным анализом недостаточно. Кроме того, необходимо рассматривать полную модель сухого трения, включающую силу и момент трения. При использовании для них аппроксимаций Паде сила и момент сухого трения имеют следующий вид [6]:

$$F_d = -F_0 \frac{u}{u + \beta \Omega \rho}, \quad M_d = -M_0 \frac{\Omega \rho}{\Omega \rho + \alpha u}, \quad (3)$$

где  $F_0$ ,  $M_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – коэффициенты Паде-аппроксимации первого порядка, определяемые через моменты распределения нормального напряжения в области контакта;  $\Omega$  – скорость вращения волчка вокруг вертикальной оси;  $\rho$  – радиус пятна контакта волчка с горизонтальной поверхностью.

Согласно формуле (3), сила сухого трения может рассматриваться как сила вязкого трения (1) при больших угловых скоростях вращения волчка [7], однако коэффициент трения скольжения зависит от модуля скорости вращения  $\Omega$ :

$$F_d \approx -F_0 \frac{u}{\beta \Omega \rho}. \quad (4)$$

В работе [8] рассматривалось численное решение задачи тел вращения на основе модели трения (3). В ней показано, что подъем центра тяжести тел вращения возможен, начиная с определенной угловой скорости его раскручивания, что согласуется с выводами работы [9]. Однако про наличие порогового значения коэффициента трения или коэффициента шероховатости поверхности в ней ничего не упоминается. Таким образом, вопрос о теоретическом описании обнаруженного в данной работе нижнего порогового значения силы трения для переворота волчка на  $180^\circ$  пока остается открытым и требует дальнейшего изучения.

**Заключение.** В работе рассмотрены особенности движения волчка тип-топ при его автоматизированной раскрутке с последующим выталкиванием на горизонтальную поверхность. Продемонстрировано, что траектория движения точки касания волчком плоскости состоит из нескольких характерных этапов: короткого отрезка движения на шляпке до переворота на ножку, петли неправильной формы при движении после переворота на ножку, скручивающейся спирали при движении на ножке, опрокидывании на шляпку и обратного движения до полной остановки. Показано, что с ростом скорости раскрутки волчка максимальный радиус закручивания спирали возрастает, также увеличивается число витков спирали в движении волчка до переворота в устойчивое положение равновесия. Экспериментально продемонстрирован эффект исчезновения способности у волчка к перевороту при уменьшении шероховатости поверхности, что свидетельствует о наличии нижнего граничного значения силы трения между контактирующими поверхностями, необходимой для осуществления переворота волчка на  $180^\circ$ .

### Список литературы

1. К созданию прототипа сферического китайского волчка / М. С. Чоччи [и др.] // Нелинейная динамика. 2012. Т. 1, № 2. С. 391–425.
2. Карапетян А. В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. Т. 43, № 3. С. 33–41.
3. Карлович Т. Б., Васеха А. П., Ласовский Р. Н. Экспериментальное исследование траектории точки касания волчка тип-топ с горизонтальной поверхностью при его движении // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 19–24. DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-3.
4. Маркеев А. П. К динамике волчка // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 3. С. 30–38.
5. Карапетян А. В., Муницына М. А. Динамика волчка тип-топ при вязком трении // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 114–121.

6. Журавлев В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62, вып. 5, С. 762–767.
7. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
8. Муницына М. А. Переходные процессы в динамике волчка тип-топ // ПММ. 2020. Т. 84, вып. 4, С. 426–434.
9. Карлович Т. Б., Ласовский Р. Н. Исследование кинетических характеристик волчка тип-топ с горизонтальной поверхностью при его движении // Информационные технологии: материалы докл. 88-й науч.-техн. конф. проф.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 29 янв. – 16 фев. 2024 г. Минск: БГТУ, 2024. С. 243–246. URL: <https://elib.belstu.by/bitstream/123456789/67770/1/3.%20Карлович.pdf> (дата обращения: 14.11.2025).

### References

1. Ciocci M. S., Malengier B., Langerok B., Grimonprez B. Towards the creation of a prototype of Spherical Chinese top. *Nelineynaya dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2012, vol. 1, no. 2, pp. 391–425 (In Russian).
2. Karapetyan A. V. Global quality analysis of Chinese spinning top (tippe top) dynamics. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Dinamika tverdogo tela* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid Mechanics], 2008, vol. 43, no. 3, pp. 33–41 (In Russian).
3. Karlovich T. B., Vasekha A. P., Lasovsky R. N. Experimental study of the trajectory of the point of contact of a tip-top with a horizontal surface during its movement *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2024, no. 2 (284), pp. 19–24. DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-3 (In Russian).
4. Markeev A. P. To the dynamics of a top. *Izvestiya AN SSSR. Mekhaika tverdogo tela* [Izvestiya Academy of Sciences of the USSR. Mechanics TV bodies], 1984, no. 3, pp. 30–38 (In Russian).
5. Karapetyan A. V., Munitsyna M. A. Dynamics of a tip-top with viscous friction. *Trudy MFTI* [Proceedings of MFTI], 2021, vol. 13, no. 1, pp. 114–121 (In Russian).
6. Zhuravlev V.F. On the model of the dry friction in the problem of rolling of solid bodies. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 1998, vol. 62, issue 5, pp. 762–767 (In Russian).
7. Contensu P. The connection between sliding friction and spinning friction and its consideration in the theory of top. *Problemy giroskopii* [Problems of Gyroscopy], Moscow, Mir Publ., 1967, pp. 60–77 (In Russian).
8. Munitsyna M. A. Transient processes in the dynamics of a tip-top *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 2020, vol. 84, issue 4, pp. 426–434 (In Russian).
9. Karlovich T. B., Lasovsky R. N. Study of kinetic characteristics of tip-top with horizontal surface during its movement. *Informatsionnyye tekhnologii: materialy dokladov 88-y nauchno-tekhnicheskoy konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunarodnym uchastiyem), Minsk, 29 yanvarya – 16 fevralya 2024 g.* [Information technologies: materials] of reports of the 88<sup>th</sup> scientific and technical conference of faculty, researchers and postgraduate students (with international participation), Minsk, January 29 – February 16, 2024. Minsk, 2024, pp. 243–246. Available at: <https://elib.belstu.by/bitstream/123456789/67770/1/3.%20Карлович.pdf> (accessed 05.09.2025) (In Russian).

### Информация об авторах

**Карлович Татьяна Борисовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [tbkar@mail.ru](mailto:tbkar@mail.ru). SPIN-код: 8275-0733. AuthorID: 844939.

**Наркевич Анна Леонидовна** – кандидат технических наук, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: narkevich\_ann@belstu.by. SPIN-код: 3511-6582. AuthorID: 801530.

#### **Information about the authors**

**Karlovich Tatyana Borisovna** – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru. SPIN code: 8275-0733. AuthorID: 844939.

**Narkevich Anna Leonidovna** – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: narkevich\_ann@belstu.by. SPIN code: 3511-6582. AuthorID: 801530.

*Поступила после доработки 30.12.2025*