УДК 514.76

**Н. П. Можей**
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

# ИНВАРИАНТНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ. КОМПЛЕКСНЫЙ СЛУЧАЙ

Связности являются одним из важнейших объектов геометрии многообразий, поскольку позволяют сравнивать геометрические величины в различных точках многообразия. Если сохраняющая симплектическую форму связность имеет нулевое кручение, то ее называют симплектической связностью. Связности, совместимые с симплектической структурой, находят применение в теоретической физике, геометрической теории интегрируемых гамильтоновых систем и других областях современной науки. Во введении статьи указан объект исследования – симметрические пространства со связностью и почти симплектической структурой. Цель работы – изучение инвариантных связностей на пространствах указанного вида. В статье приведены основные понятия: почти симплектическое пространство, редуктивное пространство, симметрическое пространство, инвариантная аффинная связность, почти симплектическая связность, тензор кручения, тензор кривизны. В основной части работы для четырехмерных симметрических однородных пространств с почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором найдены и выписаны в явном виде инвариантные аффинные связности, почти симплектические связности, тензоры кручения и кривизны. В данной работе все изучаемые объекты рассматриваются над полем комплексных чисел.

**Ключевые слова:** однородное пространство, симметрическое пространство, почти симплектическая структура, аффинная связность, симплектическая связность, тензор кривизны.

**Для цитирования:** Можей Н. П. Инвариантные связности на четырехмерных симметрических однородных пространствах с почти симплектической структурой. Комплексный случай // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2026. № 1 (302). С. 15–26.
DOI: 10.52065/2520-6141-2026-302-2.

**N. P. Mozhey**
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

# INVARIANT CONNECTIONS ON FOUR-DIMENSIONAL SYMMETRIC HOMOGENEOUS SPACES WITH ALMOST SYMPLECTIC STRUCTURE. THE COMPLEX CASE

Connections are one of the most important objects in manifold geometry, as they allow us to compare geometric quantities at different points on the manifold. If a connection preserving a symplectic form has zero torsion, it is called a symplectic connection. Connections compatible with the symplectic structure find application in theoretical physics, in the geometric theory of integrable Hamiltonian systems, and other areas of modern science. The introduction to this article describes the object of study: symmetric spaces with a connection and an almost symplectic structure. The goal of this paper is to study invariant connections on spaces of this type. The article introduces the following key concepts: almost symplectic space, reductive space, symmetric space, invariant affine connection, almost symplectic connection, torsion tensor, and curvature tensor. In the main part of the paper, invariant affine connections, almost symplectic connections, torsion tensors, and curvature tensors are found and explicitly written out for four-dimensional symmetric homogeneous spaces with an almost symplectic structure and an unsolvable stabilizer. In this paper, all objects under study are considered over the field of complex numbers.

**Keywords:** homogeneous space, symmetric space, almost symplectic structure, affine connection, symplectic connection, curvature tensor.

**For citation:** Mozhey N. P. Invariant connections on four-dimensional symmetric homogeneous spaces with almost symplectic structure. The complex case. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2026, no. 1 (302), pp. 15–26 (In Russian).
DOI: 10.52065/2520-6141-2026-302-2.

**Введение.** Связности являются одним из важнейших объектов геометрии многообразий, поскольку позволяют сравнивать геометрические величины в различных точках многообразия. Если сохраняющая симплектическую форму связность имеет нулевой кручение, то ее называют симплектической связностью.

П. К. Рашевский применял пространства симплектической связности к исследованию широкого класса дифференциальных уравнений, в книге [1] он называл эти пространства «пространствами линейной формы четного класса». Широко использовал геометрию пространств симплектической связности и В. П. Маслов в [2].

Рассмотрим почти симплектическое многообразие, т. е. многообразие с невырожденной внешней 2-формой (не обязательно замкнутой), и опишем все линейные связности, которые сохраняют эту форму. В классическом случае невырожденной симметричной (римановой или псевдоримановой) формы ответ хорошо известен благодаря Леви-Чивита, для почти симплектической структуры такой выделенной связности нет.

С описанием четырехмерных нетривиальных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором (над полем $\mathbb{C}$) можно ознакомиться в статье [3], также в ней приведены более подробный тематический обзор и обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. Цель данной работы – нахождение инвариантных аффинных связностей на указанных пространствах, выделение почти симплектических связностей и описание их тензоров кривизны и кручения.

**Основная часть.** Пусть $(\bar{G}, M)$ – четырех-мерное однородное пространство, где $\bar{G}$ – группа Ли на многообразии $M$. Обозначим через $G = \bar{G}_x$ стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Поставим в соответствие $(\bar{G}, M)$ пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе $G$. Используя линеаризацию, проблему классификации однородных пространств $(\bar{G}, M)$ можно свести к классификации эффективных пар алгебр Ли $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ с точностью до эквивалентности пар [4]. Однородное пространство $\bar{G}/G$ редуктивно, если $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $ad(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $ad(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Симметрические однородные пространства – частный случай редуктивных однородных пространств, если $\bar{G}/G$ является *симметрическим*, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Пространство $B(\mathfrak{m})$ билинейных форм на $\mathfrak{m}$ естественным образом становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить $(x.b)(v_1, v_2) = -b(x.v_1, v_2) - b(v_1, x.v_2)$, где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in \mathfrak{m}$, $b \in B(\mathfrak{m})$. *Почти симплектической структурой на* $\mathfrak{g}$*-модуле* $\mathfrak{m}$ называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма $b \in B(\mathfrak{m})$, такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Другими словами, $b \in B(\mathfrak{m})^{\mathfrak{g}}$. Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(\bar{G}, M)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ (см., например, [5]). Редуктивное (и, соответственно, симметрическое) однородное пространство всегда допускает инвариантную связность. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ имеет вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ – вид $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Если тензор кручения связности $\Lambda$ тождественно равен нулю, то говорят, что $\Lambda$ есть связность без кручения или симметричная связность. Аффинная связность без кручения называется *почти симплектической*, если она равна нулю на 2-форме.

Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что подалгебра $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-4}$, а $\{u_1 = e_{n-3}, u_2 = e_{n-2}, u_3 = e_{n-1}, u_4 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для ссылки на подалгебры будем использовать следующее обозначение: d.n, где d – размерность подалгебры, а n – ее порядковый номер, соответствующие приведенным в [6]. Поскольку ограничение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Будем выписывать ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, $\Lambda(u_4)$, тензор кривизны $R$ – описывать его значениями $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_1,u_4)$, $R(u_2,u_3)$, $R(u_2,u_4)$, $R(u_3,u_4)$, а тензор кручения $T$ – значениями $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_1,u_4)$, $T(u_2,u_3)$, $T(u_2,u_4)$, $T(u_3,u_4)$. Далее предполагается, что $p_{i.j}$, $q_{i.j}$, $s_{i.j} \in \mathbb{C}$ при $i, j = 1{,}4$. Классификация симметрических пар с почти симплектической структурой приведена в [3].

Результат классификации почти симплектических связностей на нетривиальных симметрических парах $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, а также их тензоров кривизны представлен в следующей теореме.

**Теорема.** *Любое нетривиальное четырех-мерное симметрическое однородное пространство над полем* $\mathbb{C}$ *с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой, задаваемое парой* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$*, такой, что* $\mathfrak{g}$ *неразрешима, локально эквивалентно одной и только одной из следующих пар:*

| 4.4.2 | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 0 | $e_3$ | $-e_4$ | $u_1$ | 0 | $-u_3$ | 0 |
| $e_2$ | 0 | 0 | $-e_3$ | $e_4$ | 0 | $u_2$ | 0 | $-u_4$ |
| $e_3$ | $-e_3$ | $e_3$ | 0 | $e_1-e_2$ | 0 | $u_1$ | $-u_4$ | 0 |
| $e_4$ | $e_4$ | $-e_4$ | $-e_1+e_2$ | 0 | $u_2$ | 0 | 0 | $-u_3$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | $-u_2$ | 0 | 0 | $2e_1+e_2$ | $e_3$ |
| $u_2$ | 0 | $-u_2$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | $e_4$ | $e_1+2e_2$ |
| $u_3$ | $u_3$ | 0 | $u_4$ | 0 | $-2e_1-e_2$ | $-e_4$ | 0 | 0 |
| $u_4$ | 0 | $u_4$ | 0 | $u_3$ | $-e_3$ | $-e_1-2e_2$ | 0 | 0 |

| 4.10.6 | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | $2e_2$ | 0 | $-2e_4$ | $u_1$ | 0 | $-u_3$ | 0 |
| $e_2$ | $-2e_2$ | 0 | 0 | $e_1$ | 0 | 0 | $u_1$ | 0 |
| $e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_2$ |
| $e_4$ | $2e_4$ | $-e_1$ | 0 | 0 | $u_3$ | 0 | 0 | 0 |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | $-u_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_3$ |
| $u_3$ | $u_3$ | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_4$ | 0 | 0 | $-u_2$ | 0 | 0 | $-e_3$ | 0 | 0 |

| 4.11.2 | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 0 | $2e_3$ | $-2e_4$ | $u_1$ | 0 | $-u_3$ | 0 |
| $e_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $u_2$ | 0 | $-u_4$ |
| $e_3$ | $-2e_3$ | 0 | 0 | $e_1$ | 0 | 0 | $u_1$ | 0 |
| $e_4$ | $2e_4$ | 0 | $-e_1$ | 0 | $u_3$ | 0 | 0 | 0 |
| $u_1$ | $-u_1$ | 0 | 0 | $-u_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 0 | $-u_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $e_2$ |
| $u_3$ | $u_3$ | 0 | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $u_4$ | 0 | $u_4$ | 0 | 0 | 0 | $-e_2$ | 0 | 0 |

| 6.3.3 | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $0$ | $-e_2$ | $2e_3$ | $e_4$ | $0$ | $-2e_6$ | $u_1$ | $0$ | $-u_3$ | $0$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $0$ | $e_4$ | $2e_5$ | $0$ | $0$ | $u_2$ | $0$ | $0$ | $-u_3$ |
| $e_3$ | $-2e_3$ | $-e_4$ | $0$ | $0$ | $0$ | $e_1$ | $0$ | $0$ | $u_1$ | $0$ |
| $e_4$ | $-e_4$ | $-2e_5$ | $0$ | $0$ | $0$ | $e_2$ | $0$ | $0$ | $u_2$ | $u_1$ |
| $e_5$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $u_2$ . |
| $e_6$ | $2e_6$ | $0$ | $-e_1$ | $-e_2$ | $0$ | $0$ | $u_3$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $u_1$ | $-u_1$ | $-u_2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-u_3$ | $0$ | $0$ | $2e_5$ | $e_4$ |
| $u_2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $4e_5$ |
| $u_3$ | $u_3$ | $0$ | $-u_1$ | $-u_2$ | $0$ | $0$ | $-2e_5$ | $0$ | $0$ | $-e_2$ |
| $u_4$ | $0$ | $u_3$ | $0$ | $-u_1$ | $-u_2$ | $0$ | $-e_4$ | $-4e_5$ | $e_2$ | $0$ |

*Почти симплектические связности (без кручения) на указанных пространствах имеют вид, указанный в табл. 1.*

Таблица 1

**Почти симплектические связности**

| Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ | Почти симплектическая связность |
|---|---|
| 4.4.2, 4.11.2 | нулевая |
| 4.10.6, 6.3.3 | $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$, $\Lambda(u_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. |

*Тензоры кривизны почти симплектических связностей (без кручения) на указанных пространствах имеют вид, приведенный в табл. 2.*

Таблица 2

**Тензоры кривизны почти симплектической связности**

| Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ | Тензор кривизны |
|---|---|
| 4.4.2 | $R(u_1, u_2) = 0$, $R(u_1, u_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R(u_1, u_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, |

Окончание табл. 2

| Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ | Тензор кривизны |
|---|---|
| | $R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $R(u_2,u_4)=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, $R(u_3,u_4)=0$. |
| 4.11.2 | $R(u_1,u_2)=R(u_1,u_3)=R(u_1,u_4)=R(u_2,u_3)=0$, $R(u_2,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $R(u_3,u_4)=0$. |
| 4.10.6 | $R(u_1,u_2)=R(u_1,u_3)=0$, $R(u_1,u_4)=R(u_2,u_3)=0$, $R(u_2,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $R(u_3,u_4)=0$. |
| 6.3.3 | $R(u_1,u_2)=0$, $R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $R(u_1,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $R(u_2,u_3)=0$, $R(u_2,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $R(u_3,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. |

Действительно, найдем для каждого четырехмерного нетривиального симметрического однородного пространства над полем $\mathbb{C}$ (с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором) инвариантные аффинные связности, тензоры кривизны и кручения и определим, при каких условиях связность является почти симплектической.

В случае 4.10.6 инвариантная аффинная связность

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&0&p_{1,4}\\0&0&p_{2,3}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&q_{2,4}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-p_{2,3}&0&0&0\\0&0&0&p_{1,4}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_4)=\begin{pmatrix}s_{3,3}&0&0&0\\0&s_{4,4}-q_{2,4}&0&s_{2,4}\\0&0&s_{3,3}&0\\0&0&0&s_{4,4}\end{pmatrix}.$$

Связность, сохраняющую симплектическую форму, получим при $p_{2,3}=p_{1,4}$, $s_{3,3}=0$, $q_{2,4}=$ $=2s_{4,4}$, эта связность имеет вид

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&0&p_{1,4}\\0&0&p_{1,4}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&2s_{4,4}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-p_{1,4}&0&0&0\\0&0&0&p_{1,4}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-s_{4,4}&0&s_{2,4}\\0&0&0&0\\0&0&0&s_{4,4}\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны произвольной инвариантной аффинной связности:

$$R(u_1,u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&2p_{2,3}p_{1,4}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_4)=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&-p_{1,4}s_{3,3}+p_{1,4}s_{4,4}\\0&0&p_{2,3}q_{2,4}+p_{2,3}s_{3,3}-p_{2,3}s_{4,4}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&{q_{2,4}}^2-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_3,u_4)=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-p_{2,3}q_{2,4}-p_{2,3}s_{3,3}+p_{2,3}s_{4,4}&0&0&0\\0&0&0&-p_{1,4}s_{3,3}+p_{1,4}s_{4,4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

У связности, сохраняющей симплектическую форму, тензор кривизны

$$R(u_1,u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&2{p_{1,4}}^2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&p_{1,4}s_{4,4}\\0&0&p_{1,4}s_{4,4}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&4{s_{4,4}}^2-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_3,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-p_{1,4}s_{4,4}&0&0&0\\0&0&0&p_{1,4}s_{4,4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кручения произвольной инвариантной аффинной связности:

$$T(u_1,u_2)=T(u_2,u_3)=(0,0,0,0),$$
$$T(u_1,u_3)=\left(0,2p_{2,3},0,0\right),$$
$$T(u_1,u_4)=\left(p_{1,4}-s_{3,3},0,0,0\right),$$
$$T(u_2,u_4)=\left(0,2q_{2,4}-s_{4,4},0,0\right),$$
$$T(u_3,u_4)=\left(0,0,p_{1,4}-s_{3,3},0\right).$$

Соответственно, $T=0$ при $p_{1,4}=s_{3,3}$, $p_{2,3}=0$, $s_{4,4}=2q_{2,4}$.

Для связности, сохраняющей симплектическую форму, тензор кручения

$$T(u_1,u_2)=T(u_2,u_3)=(0,0,0,0),$$
$$T(u_1,u_3)=\left(0,2p_{1,4},0,0\right), T(u_1,u_4)=\left(p_{1,4},0,0,0\right),$$
$$T(u_2,u_4)=\left(0,3s_{4,4},0,0\right), T(u_3,u_4)=\left(0,0,p_{1,4},0\right).$$

Соответственно, $T=0$ при $p_{1,4}=0$, $s_{4,4}=0$. Тогда почти симплектическая связность (без кручения) и ее тензор кривизны имеют вид, приведенный в теореме.

В случае 6.3.3 инвариантная аффинная связность

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&0&p_{1,4}\\0&0&s_{3,3}-s_{2,2}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-s_{2,2}+s_{3,3}+p_{1,4}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_{3,3}+s_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_4)=\begin{pmatrix} s_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{2,2} & 0 & s_{2,4} \\ 0 & 0 & s_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{3,3}+p_{1,4} \end{pmatrix}.$$

Связность, сохраняющую симплектическую форму, получим при $s_{3,3}=0,\ s_{2,2}=-p_{1,4}$. Тензор кривизны произвольной инвариантной аффинной связности:

$$R(u_1,u_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2p_{1,4}s_{2,2}+2p_{1,4}s_{3,3}-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_4)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p_{1,4}^2-1 \\ 0 & 0 & s_{2,2}^2-2s_{2,2}s_{3,3}+s_{3,3}^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_4)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{1,4}^2-2p_{1,4}s_{2,2}+2p_{1,4}s_{3,3}+s_{2,2}^2-2s_{2,2}s_{3,3}+s_{3,3}^2-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_3,u_4)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_{2,2}^2+2s_{2,2}s_{3,3}-s_{3,3}^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{1,4}^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения произвольной инвариантной аффинной связности

$$T(u_1,u_2)=T(u_2,u_3)=(0,0,0,0),$$

$$T(u_1,u_3)=\left(0,2s_{3,3}-2s_{2,2},0,0\right),$$
$$T(u_1,u_4)=\left(p_{1,4}-s_{3,3},0,0,0\right),$$
$$T(u_2,u_4)=\left(0,-2s_{2,2}+s_{3,3}+p_{1,4},0,0\right),$$
$$T(u_3,u_4)=\left(0,0,-p_{1,4}-s_{3,3},0\right).$$

Для связности, сохраняющей симплектическую форму, тензор кручения

$$T(u_1,u_2)=T(u_2,u_3)=(0,0,0,0),$$
$$T(u_1,u_3)=\left(0,2p_{1,4},0,0\right),T(u_1,u_4)=\left(p_{1,4},0,0,0\right),$$
$$T(u_2,u_4)=\left(0,3p_{1,4},0,0\right),T(u_3,u_4)=\left(0,0,-p_{1,4},0\right).$$

Соответственно, $T=0$ при $p_{1,4}=0.$ Тогда почти симплектическая связность (без кручения) и ее тензор кривизны имеют вид, приведенный в теореме.

В случае 4.4.2 инвариантная аффинная связность нулевая, тензор кривизны имеет следующий вид:

$$R(u_1,u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_4)=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_4)=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},$$

$$R(u_3,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

а тензор кручения нулевой. Связность единственная и является почти симплектической.

В случае 4.11.2 аффинная связность также нулевая, тензор кривизны –

$$R(u_1,u_2)=R(u_1,u_3)=R(u_1,u_4)=R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$R(u_3,u_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кручения нулевой. Связность единственная и является почти симплектической.

**Заключение.** В работе найдены и выписаны в явном виде (над полем $\mathbb{C}$) инвариантные аффинные связности на четырехмерных нетривиальных симметрических однородных пространствах с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором, выделены почти симплектические связности, описаны их тензоры кривизны и кручения.

### Список литературы

1. Рашевский П. К. Геометрическая теория дифференциальных уравнений в частных производных. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 355 с.

2. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Наука, 1965. 554 с.

3. Можей Н. П. Вещественные формы четырехмерных симметрических пространств с почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Сер. 2: Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2025. Т. 15, № 3. С. 6–17.

4. Mostow G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces // Annals of Mathematics. 1950. Vol. 52, no. 3. P. 606–636.

5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // American Journal of Mathematics. 1954. Vol. 76, no. 1. P. 33–65.

6. Можей Н. П. Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической структурой. Комплексный случай // Труды БГТУ. Сер. 3: Физико-математические науки и информатика. 2021. № 1 (242). С. 13–18.

### References

1. Rashevskiy P. K. *Geometricheskaya teoriya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Geometrical theory of partial differential equations]. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1947. 355 p. (In Russian).

2. Maslov V. P. *Teoriya vozmushcheniy i asimptoticheskiye metody* [Perturbation theory and asymptotic methods]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 554 p. (In Russian).

3. Mozhey N. P. Real forms of four-dimensional symmetric spaces with almost symplectic structure and insoluble stabilizer. *Vestnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta imeni Yanki Kupaly. Seriya 2: Matematika. Fizika. Informatika, vychislitel'naya tekhnika i upravleniye* [Bulletin of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2: Mathematics. Physics. Informatics, Computer Engineering and Control], 2025, vol. 15, no. 3, pp. 6–17 (In Russian).

4. Mostow G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces. *Annals of Mathematics*, 1950, vol. 52, no. 3, pp. 606–636.

5. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65.

6. Mozhey N. P. Four-dimensional homogeneous spaces with almost symplectic structure. Complex case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2021, no. 1 (242), pp. 13–18 (In Russian).

## Информация об авторе

**Можей Наталья Павловна** − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru. SPIN-код: 3852-0216. Scopus ID: 56357982700. ORCID: 0000-0001-9237-7208. AuthorID: 386807.

## Information about the author

**Mozhey Natalya Pavlovna** − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6 P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru. SPIN-код: 3852-0216. Scopus ID: 56357982700. ORCID: 0000-0001-9237-7208. AuthorID: 386807.

*Поступила после доработки 13.11.2025*