Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. В. Игнатенко, М. С. Капура

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В 2-х частях
Часть 2

В 2-х книгах
Книга 2

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов учреждений
высшего образования по технологическим специальностям

Минск 2026

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
И26

Р е ц е н з е н т ы :
кафедра высшей математики Белорусского государственного экономического университета (доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры *М. П. Дымков*);
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики ФПМИ Белорусского государственного университета *Н. Н. Труш*

Игнатенко, В. В.
И26 Высшая математика. В 2 ч. Ч. 2, кн. 2 : учеб. пособие для студентов технологических специальностей / В. В. Игнатенко, М. С. Капура. – Минск : БГТУ, 2026. – 224 с.
ISBN 978-985-897-260-8.

Учебное пособие «Высшая математика» состоит из двух частей и полностью соответствует требованиям учебных планов технических вузов. Первая часть издания (в двух книгах) вышла в 2022–2023 гг.

Книга 2 второй части включает следующие темы: теория вероятностей; математическая статистика; линейное программирование; теория массового обслуживания. В ней изложены основные теоретические сведения, представлены решения типовых задач с рекомендациями, задания для аудиторной и самостоятельной работы. Приведены примеры реальных производственных задач, для которых построены математические модели, получены и проанализированы решения этих моделей.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-897-260-8 (Ч. 2)
ISBN 978-985-897-036-9

Тема 5 | ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей – это раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними. Возникновение теории вероятностей как науки относят к средним векам и первым попыткам математического анализа азартных игр (орлянка, кости, рулетка).

5.1. Случайные события и их классификация

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей ***массовых, однородных, случайных явлений***.

Первичным понятием теории вероятностей выступает ***событие***.

Под ***событием*** мы будем понимать всякий факт, который может произойти или не произойти при определенных условиях (комплексе условий S). Комплекс условий S тождественен понятиям опыт, эксперимент, испытание.

События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C и т. д.

Наблюдаемые события можно разделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называется событие, если в данном испытании оно обязательно происходит. Достоверное событие будем обозначать через Ω.

Например, если в ящике находятся только красные шары, то событие «из ящика извлечен красный шар» является достоверным (в ящике нет шаров другого цвета).

Невозможным называется событие, которое никогда не произойдет в данном испытании. Невозможное событие будем обозначать через $\varnothing$.

Например, бросается игральная кость, на гранях которой написаны числа от единицы до шести. Событие, состоящее в том, что на верхней грани выпадет число восемь, является невозможным.

Случайным называется событие, которое может произойти, а может и не произойти в данном испытании. Например, выпадение герба при однократном подбрасывании монеты, число выпавших очков при подбрасывании игральной кости, количество дождливых дней в июне для данной местности и т. п.

Случайные события разделяются на следующие классы.

1. Противоположные события. Два события называются п***ротивоположными*** в данном испытании, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$.

Например, событие A – выпадение «герба» при однократном подбрасывании монеты. Тогда противоположное событие $\overline{A}$ – выпадение «решки»; три стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Событие A состоит в том, что хотя бы один стрелок попадет в мишень. Тогда противоположное событие $\overline{A}$ – все три стрелка промахнутся.

2. Совместные и несовместные события. Два события называются ***совместными*** в данном испытании, если появление одного из них не исключает появление другого в этом испытании.

Например, бросается игральная кость. Событие A – число выпавших очков больше 3, событие B – выпадет нечетное число очков. Эти события совместные, так как в случае выпадения числа 5 произойдут оба события.

Два события называются ***несовместными*** в данном испытании, если появление одного из них исключает появление другого в этом испытании.

Например, из колоды карт достают одну карту. Событие A – вытянули туз, событие B – даму. События A и B несовместные; события «промах» и при одном выстреле «попадание» будут несовместными.

Несколько событий $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ называются ***попарно несовместными***, если любые два из них несовместны.

События $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ называются ***несовместными в совокупности***, если события, составляющие любую совокупность из них, не могут появиться вместе в одном и том же испытании.

3. Равновозможные события. События называются ***равновозможными***, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем любое другое.

Например, подбрасывается монета. События: A – выпадение герба; B – выпадение «решки». События A и B равновозможные. В примере с бросанием игральной кости события $A_1, A_2, \ldots, A_6$ есть равновозможные события.

Полная группа событий. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу событий*** для данного опыта, если они попарно несовместны и в результате опыта непременно произойдет одно и только одно из них.

Например, производится бросание игральной кости. Пусть события: $A_i (i = \overline{1,6})$ – выпадение на верхней грани i-го числа очков. Эти события образуют полную группу событий.

Событие A и противоположное событие $\overline{A}$ представляют собой простейший случай полной группы событий.

4. Элементарные события (Элементарные исходы). Совокупность событий, образующих полную группу равновозможных, несовместных событий, называется ***пространством элементарных событий (исходов)*** и обозначается Ω. Каждое из этих событий называется ***элементарным событием (исходом)*** и обозначается ω_i.

Заметим, что каждое элементарное событие является случайным, а все пространство – достоверным событием Ω.

Так, в приведенном выше примере с бросанием игральной кости события $A_1, A_2, \ldots, A_6$ образуют пространство элементарных событий.

Еще пример: монета подбрасывается два раза. Обозначим Г – выпадение «герба», Р – выпадение «решки». Тогда пространство элементарных событий представляет совокупность следующих событий: (Г, Г), (Г, Р), (Р, Г), (Р, Р).

Любое подмножество элементарных событий образует некоторое случайное событие A. Говорят, что событие A произошло, если в результате опыта имело место хотя бы одно из элементарных событий, принадлежащих событию A.

Невозможное событие $\varnothing$ представляет собой событие, противоположное достоверному событию Ω. Очевидно, что невозможное событие это – пустое множество элементарных событий.

Например, выпадение более шести очков при бросании игральной кости, если на гранях написаны числа от 1 до 6, является невозможным событием.

Если события A и B совместны, это значит, что существуют такие элементарные события ω_i, которые входят в состав A и B.

Если события A и B несовместны, это значит, что нет ни одного элементарного события, которое входило бы в состав A и B.

Арифметические операции над событиями.

☑*Определение.* ***Суммой***, или ***объединением*** $A+B(A\bigcup B)$ двух событий A и B называется такое событие, которое состоит в осуществлении события A ***или*** события B, ***или*** событий A и B, если это возможно.

Сумма событий $A+B$ состоит из всех элементарных событий, принадлежащих событиям A и B. Когда речь идет о сумме событий используется союз ***или***.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Например, бросается игральная кость. Событие A – число выпавших очков больше 3, событие B – выпадет нечетное число очков. Событие $A+B$ состоит в появлении одного из чисел: 1, 3, 4, 5, 6.

Если все элементарные исходы $\omega_i \in A$ принадлежат событию B то говорят что событие A ***принадлежит событию*** B и записывается $A \subset B$ ($B \supset A$).

Основные свойства суммы событий:

1. $A+A=A$.
2. $A+\Omega=\Omega$.
3. $A+\varnothing=A$.
4. $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$, если $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу событий.
5. Если $A \subset B$ то $A+B=B$.

☑*Определение.* ***Произведением*** или ***пересечением*** двух событий A и B называется событие $AB(A\bigcap B)$, состоящее в том, что в результате испытания произошли **и** событие A, **и** событие B.

Произведение событий AB состоит из элементарных событий, входящих в событие A и событие B.

Когда речь идет о произведении событий используется союз ***и***.

Например, бросается игральная кость. Событие A – число выпавших очков больше 3, событие B – выпадет нечетное число очков. Произведением AB является выпадение числа 5.

Основные свойства произведения событий:

1. $A\cdot A=A$.
2. $A\cdot\Omega=A$.
3. $A\cdot\varnothing=\varnothing$.

4. Если A и B несовместны, то $AB = \varnothing$.

5. Если $A \subset B$, то $AB = A$.

☒ *ПРИМЕР 1.* Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Событие A – попадание в мишень первым стрелком, событие B – попадание в мишень вторым стрелком. Описать, что означают события $A + B$ и AB.

Решение. Событие $A + B$ означает, что в мишень попал первый стрелок, а второй промахнулся, *или* в мишень попал второй стрелок, а первый промахнулся, *или* оба стрелка попали в мишень. Событие AB означает, что оба стрелка попали в мишень.

Рассмотрим ***геометрическую интерпретацию операций*** над событиями.

Пусть точка случайным образом бросается на плоскость. Событие A (аналогично B) состоит в том, что точка попадет в область A (соответственно, B). На рис. 5.1 приведена геометрическая интерпретация событий A, B, $A + B$, AB.

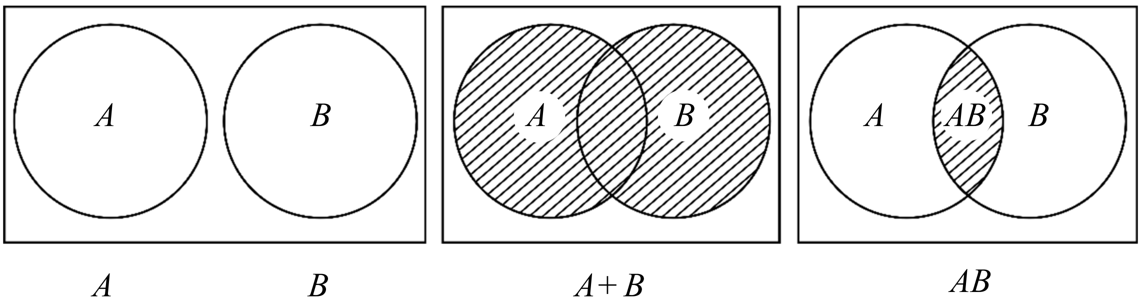


Рис. 5.1. Геометрическая интерпретация операций над событиями

Сумма событий $A + B$ представляет объединение областей A и B. Произведение событий AB представляет пересечение областей A и B.

5.2. Классическое определение вероятности

При изучении случайных событий можно заметить, что одни из них более возможны, чем другие. Рассмотрим следующий пример. Монета подбрасывается три раза. Введем события:

A – «герб» выпадет все три раза;

B – «герб» выпадет только один раз;

C – «герб» выпадет хотя бы один раз.

Интуитивно мы можем предположить, что наименее возможным является событие A, а наиболее возможным является событие C.

Для того чтобы сравнивать события по возможности их появления, нужно ввести численную меру измерения возможности их появления.

☑*Определение.* Вероятность случайного события A есть численная мера степени объективной возможности появления события A. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Естественно предположить, что вероятность невозможного события равна нулю, достоверного – единице, тогда вероятность любого случайного события заключена в пределах от нуля до единицы:

$$0 \le P(A) \le 1,\ P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1,$$

что будет подтверждено дальше.

Рассмотрим пространство элементарных событий Ω, состоящее из n элементарных (*равновозможных, несовместных, образующих полную группу*) событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Элементарное событие ω_i называется ***благоприятствующим*** событию A, если его появление влечет за собой осуществление события A.

☑*Определение. Классическое определение вероятности.* ***Вероятностью*** $P(A)$ ***случайного события*** A называется отношение числа m благоприятствующих ему элементарных событий к общему числу n элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{5.1}$$

Основные свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события Ω равна единице.

Действительно, если событие достоверно, то каждое элементарное событие будет благоприятствующим событием. В этом случае $m = n$ и, следовательно,

$$P(\Omega) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Вероятность невозможного события $\varnothing$ равна нулю $P(\varnothing) = 0$.

Действительно, если событие невозможно, то ни одно из элементарных событий не благоприятствует событию. В этом случае $m = 0$ и, следовательно,

$$P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

3. Вероятность случайного события A есть неотрицательное число, заключенное между нулем и единицей, т. е.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Замечание 1. Пользуясь формулой (5.1), очень важно помнить, что исходы эксперимента должны быть *равновозможными.*

Поясним это на следующих примерах.

☒ *ПРИМЕР 2.* Наудачу берутся два натуральных числа. Обозначим через A событие, состоящее в том, что произведение этих чисел четно. Найти вероятность события A.

Решение. 1-й способ. Имеется два исхода: произведение четно и произведение нечетно, а благоприятствующий исход только один. Тогда $P(A)=\frac{1}{2}$ (неверно).

Решение. 2-й способ. Имеется три исхода: числа четные, числа нечетные и одно четное, другое нечетное, а благоприятствующих исходов 2. Тогда $P(A)=\frac{2}{3}$ (неверно).

Решение. 3-й способ. Имеется четыре исхода: $\{$четное, четное$\}$, $\{$четное, нечетное$\}$, $\{$нечетное, четное$\}$, $\{$нечетное, нечетное$\}$, а благоприятствующих исходов три. Тогда $P(A)=\frac{3}{4}$ (верно).

В этом примере только в последнем случае исходы равновозможные, т. е. элементарные, и можно применять классическое определение вероятности.

☒ *ПРИМЕР 3.* Наудачу бросаются три правильные монеты. Какова вероятность того, что только на одной монете выпадет герб?

Решение. Рассмотрим следующие события:

A – только на одной монете выпал «герб»;

A_1 – выпали один «герб» и две «решки»;

A_2 – выпало два «герба» и одна «решка»;

A_3 – выпало три «герба»;

A_4 – выпали три «решки».

События: A_1, A_2, A_3, A_4 не являются равновозможным, поэтому их нельзя использовать для вычисления вероятности по классическому определению вероятности.

Рассмотрим следующее множество событий: {ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, РРГ, РГР, ГРР, РРР}, где Г означает выпадение «герба», Р – «решки». Эти события равновозможные, несовместные и образуют полную группу событий. Следовательно, мы имеем пространство элементарных событий $n=8$. Событию A благоприятствуют $m=3$ элементарных события: $A=\{\text{РРГ, РГР, ГРР}\}$. Тогда по формуле (5.1) искомая вероятность будет $P(A)=\frac{3}{8}$.

Замечание 2. С экспериментом может быть связано несколько пространств (множеств) элементарных событий, однако искомая вероятность случайного события будет одна и та же, независимо от выбранного пространства.

При вычислении вероятности случайного события полезно использовать элементы комбинаторики: сочетания, перестановки, размещения.

Комбинаторика изучает, сколькими различными способами можно составить множества (комбинации), удовлетворяющие определенным условиям, из элементов заданного множества.

Множество называем ***упорядоченным***, если по условиям опыта важен порядок входящих в него элементов

Например, из цифр 1, 2, 3 составляется трехзначное число. В зависимости от порядка расположения цифр, мы получаем шесть различных трехзначных чисел: 123, 132, 213, 232, 312, 321.

Перестановками из n элементов называются упорядоченные множества из этих элементов.

Две перестановки отличаются одна от другой только порядком расположения элементов.

Число всех перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n=n!,$$

где $n!$ – «эн-факториал», который вычисляется по формуле

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n,\ \ 0!=1.$$

В рассмотренном выше примере количество различных трехзначных чисел из трех цифр равно числу перестановок из трех элементов:

$$P_3=3!=1\cdot 2\cdot 3=6.$$

Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Любое его подмножество, содержащее k элементов, называется ***сочетанием*** из n элементов по k. Порядок элементов, входящих в сочетание, роли не играет. Два различных сочетания отличаются друг от друга входящими элементами.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Например, найти число комбинаций по три буквы из пяти букв: а, б, в, г, д. Причем порядок расположения букв роли не играет, т. е. (а, б, с), (а, с, б), (б, а, с), (б, с, а), (с, б, а), (с, а, б) рассматривается как одна комбинация. Таких комбинаций будет

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{20}{2 \cdot 1} = 10.$$

Размещения. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Любое его упорядоченное подмножество, содержащее m элементов, называется ***размещением*** из n элементов по m. Различают размещения без повторений, при которых один элемент входит в подмножество только один раз, и размещения с повторениями, при которых один и тот же элемент может входить в подмножество несколько раз (от одного до m раз). Число всех размещений без повторений из n элементов по m элементов обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1).$$

Число всех размещений с повторениями из n элементов по m элементов обозначается символом $(A_n^m)_{\text{повт}}$ и вычисляется по формуле

$$(A_n^m)_{\text{повт}} = n^m.$$

☒ *ПРИМЕР 4.* Набирая номер телефона, студент забыл две последние цифры. Вспомнив, что эти цифры были различны, он набрал их наугад. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Решение. Здесь элементарное событие представляет упорядоченное подмножество из двух различных цифр (важен их порядок записи). Число n всевозможных элементарных событий равно числу всех размещений без повторений из десяти элементов (множество всех цифр) по два, т. е. $n = A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90.$

Событию A – цифры набраны верно – благоприятствует только один исход, т. е. $m = 1$. Находим $P(A)$:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}.$$

☒ *ПРИМЕР 5.* В партии из 50 изделий пять бракованных. Случайным образом берется несколько изделий. Найти вероятность того, что:

а) среди выбранных наугад трех изделий нет бракованных;

б) среди выбранных наугад пяти изделий бракованными окажутся три изделия.

Решение.

а) Рассмотрим событие A – среди выбранных наугад трех изделий нет бракованных. Элементарным событием в этом опыте являются три взятых изделия. Элементарное событие представляет собой подмножество из трех элементов множества в 50 элементов. Причем порядок расположения элементов роли не играет. Тогда число n всевозможных исходов равно числу сочетаний из 50 элементов по три, т. е.

$$n = C_{50}^3 = \frac{50!}{3!(50-3)!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 47!} = 50 \cdot 49 \cdot 8 = 19\,600.$$

Благоприятствующее элементарное событие представляет собой любых три небракованных изделия. Множество всех небракованных изделий равно 45. Подмножество (элементарное событие) состоит из трех элементов. Порядок не важен. Тогда число m исходов, благоприятствующих данному событию, равно числу сочетаний из 45 (число небракованных деталей) элементов по три, т. е.

$$m = C_{45}^3 = \frac{45!}{3!(45-3)!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 42!} = 15 \cdot 22 \cdot 43 = 14\,190.$$

Искомая вероятность будет

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{14\,190}{19\,600} \approx 0,724.$$

б) Событие B – среди выбранных наугад пяти изделий бракованными окажутся три.

Элементарным событием в этом опыте являются пять взятых изделий. Как и в предыдущей задаче, здесь порядок не важен. Все множество состоит из 50 изделий, подмножество – из пяти. Тогда число n всевозможных исходов равно числу сочетаний из 50 элементов по пять, т. е.

$$n = C_{50}^{5} = \frac{50!}{5!(50-5)!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 45!} = 10 \cdot 49 \cdot 2 \cdot 47 \cdot 46 =$$
$$= 2\,118\,760.$$

Благоприятствующее элементарное событие представляет собой совокупность любых трех бракованных и двух небракованных изделий. Число всевозможных групп бракованных изделий из пяти по три будет

$$m_1 = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

Число всевозможных групп небракованных изделий из 45 по два будет

$$m_2 = C_{45}^2 = \frac{45!}{2!(45-2)!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43!}{2 \cdot 1 \cdot 43!} = 45 \cdot 22 = 990.$$

Число m элементарных событий, благоприятствующих данному событию, будет

$$m = C_{45}^2 \cdot C_5^3 = 10 \cdot 990 = 9900,$$

так как благоприятствующее элементарное событие состоит из трех бракованных изделий и двух набракованных.

Искомая вероятность

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{9900}{2\,118\,760} \approx 0{,}047.$$

⌧ *ПРИМЕР 6.* На четырех карточках написаны буквы: Т, Я, Ь, П. Ребенок в случайном порядке складывает карточки одну за другой. Найти вероятность того, что получится слово ПЯТЬ.

Решение. Элементарное событие в нашей задаче представляет упорядоченное множество из четырех карточек. У нас все элементы задействованы и важен только порядок их расположения. Число всевозможных таких исходов равно числу перестановок из четырех элементов $n = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Благоприятствующий исход у нас один, когда карточки расположены в порядке: П, Я, Т, Ь, т. е. $m = 1$.

Искомая вероятность будет

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{24} \approx 0{,}042.$$

Замечание 1. При вычислении вероятности по формуле (5.1) удобно пользоваться следующим алгоритмом:

1. Что собой представляет элементарное событие?
2. Сколько таких элементарных событий всего? Число n.
3. Что представляет благоприятствующее элементарное событие?
4. Сколько таких благоприятствующих элементарных событий всего? Число m.
5. Найденные n и m подставляем в формулу (5.1).

Замечание 2. Применяя комбинаторику, удобно пользоваться следующим алгоритмом:

1. Посмотреть, в элементарном событии задействовано все множество или подмножество.
2. Если задействовано все множество и важен порядок, то используем перестановки.
3. Если задействовано подмножество и порядок не важен, то используем сочетания.
4. Если задействовано подмножество и порядок важен, то используем размещения. В зависимости от условий задачи с повторениями или без повторений.

5.3. Статистическая вероятность. Статистическая устойчивость

Формула (5.1) для непосредственного подсчета вероятностей применима только тогда, когда опыт обладает симметрией возможных исходов. Очевидно, что вероятности таких событий, как «попадание в цель при выстреле», «выход из строя прибора в течение некоторого времени» и многих других не могут быть вычислены по формуле (5.1). Для них применяют иные способы, основанные на эксперименте.

Пусть проведена серия из n испытаний, в которых событие A появилось m раз.

☑*Определение.* ***Относительной частотой*** события A в данной серии опытов называется отношение числа испытаний m, в которых появилось событие A, к общему числу n фактически проведенных испытаний.

Относительная частота события A обозначается $W_n(A)$ и вычисляется по формуле

$$W_n(A) = \frac{m}{n}, \tag{5.2}$$

где m – число появления события A; n – общее число опытов.

Относительная частота обладает свойствами, аналогичными свойствам вероятности:

1. Относительная частота есть неотрицательное число, заключенное между нулем и единицей:

$$0 \le W_n(A) \le 1.$$

2. Относительная частота достоверного события равна единице:

$$W_n(\Omega) = 1.$$

3. Относительная частота невозможного события равна нулю:

$$W_n(\Omega) = 0.$$

При небольшом числе опытов относительная частота появления события $W_n(A)$ носит случайный характер. Она может заметно изменяться при переходе от одной группы опытов к другой. Если в различных сериях опытов относительные частоты отличаются друг от друга мало, то говорят, что частота обладает ***свойством устойчивости***. Тогда при значительном увеличении числа опытов относительная частота теряет свой случайный характер, стабилизируется, приближаясь к некоторой постоянной величине, называемой ***вероятностью данного события (статистическая вероятность).***

☑*Определение.* ***Статистическая вероятность*** события A – это число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты события A при большом числе испытаний n.

Обоснованием этого утверждения служит теорема Я. Бернулли о том, что при неограниченном увеличении числа опытов частота события будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства $|W_n(A) - P(A)| < \varepsilon$) с увеличением n неограниченно приближается к 1.

Установить экспериментально устойчивость частоты некоторого события можно только путем выполнения многих испытаний в одинаковых условиях. Неоднократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления герба. Результаты нескольких опытов представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Число испытаний и относительная частота выпадений герба

Число бросаний монеты	Число выпадений герба	Относительная частота выпадений герба
4 040	2 048	0,5169
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

Отсюда видим, что относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, равного вероятности выпадения герба при однократном бросании монеты, вычисленной по формуле (5.1).

5.4. Аксиоматическое построение теории вероятности

Аксиоматическое определение вероятности, предложенное Колмогоровым А. Н., служит логическим фундаментом всей современной теории вероятностей. Аксиоматическое построение теории вероятностей предполагает, что в ее основу ложатся некоторые предложения (аксиомы), предполагаемые за истинные, и в пределах данной теории не доказываются. Все остальные предложения теории должны выводиться из аксиом чисто логическим путем. В аксиоматике Колмогорова задается вероятностное пространство как тройка $\{\Omega, \Sigma, P\}$, где Ω – множество элементарных исходов; Σ – алгебра событий (или σ-алгебра); P – ***вероятность*** (вероятностная мера), определенная на классе событий Σ.

Пусть рассматривается случайный эксперимент и Ω – множество элементарных исходов, связанных с ним. Говорят, что класс Σ событий образует ***алгебру событий***, если выполнены следующие условия:

1) $\varnothing$ (достоверное и невозможное события принадлежат классу Σ);

2) $A \in \Sigma, B \in \Sigma \Rightarrow A + B \in \Sigma, AB \in \Sigma$. Если A и B являются событиями, то их сумма $A + B$ и произведение AB также являются событиями);

3) $A \in \Sigma \Rightarrow \overline{A} \in \Sigma$.

Отсюда вытекает, что сумма и произведение конечного числа событий в алгебре событий также является событием, чего нельзя сказать о их бесконечном числе. Если и бесконечная сумма событий является событием, то такая алгебра событий называется σ***-алгеброй.***

На классе событий Σ задается неотрицательная функция – ***вероятность*** P, удовлетворяющая следующим аксиомам:

Аксиома 1. $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in \Sigma$.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна 1: $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 3. Если A и B – несовместные события, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Из аксиоматического определения вероятности вытекают следующие свойства:

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $0 \leq P(A) \leq 1$.
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

5.5. Геометрическое определение вероятности

Если пространство элементарных исходов Ω становится бесконечным, то предыдущие определения вероятностей уже не работают и можно воспользоваться геометрическим определением вероятности. Суть метода заключается в том, что ищется вероятность попадания случайной точки в некоторую измеримую геометрическую область.

Рассмотрим более подробно на примере плоской области. Пусть в некоторую область D на плоскости наудачу бросается некоторая материальная точка. Причем она гарантированно попадает в эту область. Внутри области D рассмотрим некоторую область d, целиком лежащую в ней (рис. 5.2), и вычислим вероятность того, что брошенная точка попадет в область d (событие A).

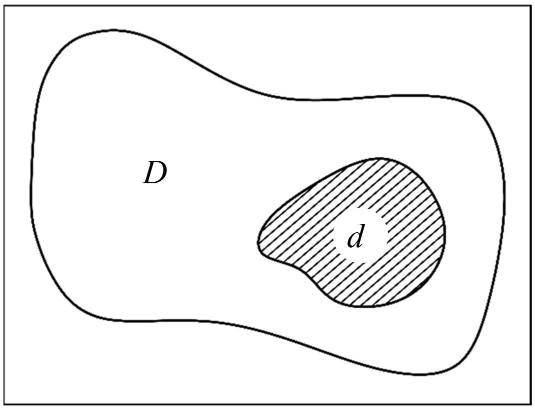


Рис. 5.2. Области D и d при геометрическом определении вероятности

Очевидно, что чем больше область d, тем больше вероятность попасть в нее, т. е. искомая вероятность $P(A)$ тесно связана с площадью S_d области: $P(A) = k \cdot S_d$. Здесь k – коэффициент пропорциональности. Если в качестве области d выбрать все множество D то попадание в нее (согласно первоначальным предположениям) будет событием достоверным: $P(\Omega) = k \cdot S_d = 1, \Rightarrow k = \dfrac{1}{S_d}$. Откуда получаем формулу для вычисления вероятности:

$$P(A) = \frac{S_d}{S_D}.$$

Вероятность, вычисленную по последней формуле, называют ***геометрической вероятностью***. Используя эту формулу, можно показать, что вероятность попадания на некоторый отрезок, целиком лежащий в области D, будет, вообще говоря, равна нулю (так как отрезок площади не имеет), хотя это событие не является невозможным, просто оно маловероятное или, как говорят в теории вероятностей, ***практически невозможное***. Еще раз подтвердили следующий факт: если событие невозможное, то вероятность его равна нулю, обратное в общем случае неверно.

☒ *ПРИМЕР 7.* Задача о встрече. Два лица И и К договорились встретиться в течение часа, в пределах которого они приходят случайным образом (наудачу), причем И ждет 20 мин, а К – 10 мин. Найти вероятность того (событие B), что они встретятся.

Решение. Пусть x – время прихода И, а y – время прихода К. Тогда $M(x;y)$ – точка, которая наудачу появляется во множестве $\Omega=\left\{M(x;y)\middle|0\le x\le 60, 0\le y\le 60\right\}$ (событие A) площадью $S=60\times 60=$ $=3600$. Чтобы встреча состоялась, нужно, чтобы каждое лицо пришло не позже, чем ушло после ожидания другое, что равносильно геометрическому условию:

$$\left(M(x;y)\in A\right)=\left\{M(x;y)\middle|x\le y+10, y\le x+20, 0\le x\le 60, 0\le y\le 60\right\},$$

причем площадь S_A благоприятствующей событию A области равна площади S квадрата Ω, за вычетом площадей двух прямоугольных треугольников с катетами по 40 и 50 единиц (рис. 5.3).

Тогда

$$P(B)=\frac{S_A}{S}=\frac{60\cdot 60-\dfrac{1}{2}\cdot 40\cdot 40-\dfrac{1}{2}\cdot 50\cdot 50}{60\cdot 60}=\frac{31}{72}\approx 0,43.$$

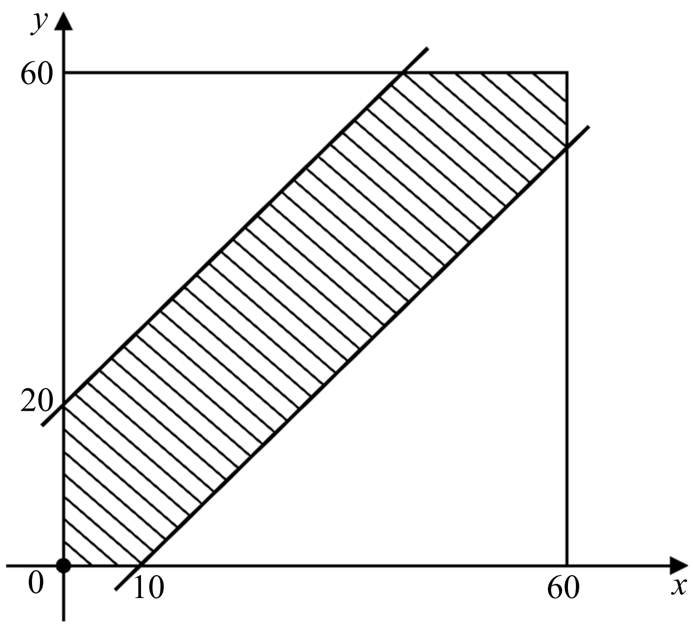


Рис. 5.3. Задача о встрече

Геометрическую вероятность можно распространить как на пространственные области, так и на числовую ось. Главное в ней измеримость: на отрезке – это длина, на плоскости – площадь, в пространстве – объем.

ПРИМЕР 8. На участке между 30-м и 80-м километром произошел обрыв телефонного кабеля. Найти вероятность того, что разрыв произошел в наиболее труднодоступном месте между 60-м и 70-м км (событие A). Предполагается, что обрыв мог произойти в любом месте и вероятность разрыва на данном участке пропорциональна длине самого участка.

Решение. Длина всего участка (отрезка) $l = 80 - 30 = 50$, а длина труднодоступного участка $l_A = 70 - 60 = 10$, поэтому $P(A) = \frac{l_A}{l} = \frac{10}{50} = 0,2.$

5.6. Основные теоремы вероятностей случайных событий

Наряду с классическим определением для вычисления вероятностей случайных событий используют основные теоремы вероятностей случайных событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{5.3}$$

Доказательство. Теорему докажем для случая, когда число элементарных исходов конечно и равно n. На рис. 5.4 каждое элементарное событие изображено точкой

$$\cdots\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}_{m_1}\cdots\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}_{m_2}\cdots$$

Рис. 5.4. Схематическое изображение несовместных событий

Пусть число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно m_1, а событию B – m_2. Тогда $P(A) = \frac{m_1}{n}$, а $P(B) = \frac{m_2}{n}$. Так как события A и B несовместные, то элементарных событий, одновременно благоприятствующих событиям A и B, нет. Следовательно, число элементарных событий, благоприятствующих событию $A+B$, равно m_1+m_2. Тогда

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Вероятность суммы нескольких несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

Следствие 2. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна 1:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Замечание. Обычно обозначают $P(A)=p, P(\overline{A})=q=1-p.$

Для формулировки теорем о вероятности произведения событий вводится понятие условной вероятности, поскольку вероятность некоторых событий может меняться по мере получения информации о протекании эксперимента.

Вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A произошло, называют ***условной вероятностью*** события B и обозначают символом $P_A(B)$ или $P(B/A)$.

Два события A и B называются ***зависимыми***, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или ненаступления другого. В противном случае события A и B называются ***независимыми***.

Например. Студент из 30 вопросов знает 20 и заходит вторым. Событие B – студент вытянет вопрос, который он знает. Перед ним первый студент вытягивает один вопрос. Событие A – первый студент вытянул вопрос, который знает второй студент. Будут ли события A и B зависимы или нет? Если произошло событие A, то $P(B/A)=\dfrac{19}{29}$. Если не произошло событие A, то $P(B/\overline{A})=\dfrac{20}{29}$. Следовательно, события A и B зависимы.

Второй пример. Монета бросается два раза. Событие A – выпадение герба при первом бросании. Событие B – выпадение герба при втором бросании. (A и B – независимые события.)

Зависимость и независимость взаимообратные.

Если события A и B независимы, то будут попарно независимы и следующие события: $(A,\overline{B}),(\overline{A},B),(\overline{A},\overline{B})$.

Несколько событий называются ***независимыми в совокупности***, если каждое из них и любая комбинация остальных есть события независимые.

Для независимых событий $P(B/A)=P(B/\overline{A})=P(B)$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B). \tag{5.4}$$

Доказательство. Теорему докажем для случая, когда число элементарных исходов конечно и равно n. Пусть число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно m, а событию B – l и k – совместному появлению событий A и B. Тогда

$$P(A)=\frac{m}{n},\quad P(AB)=\frac{k}{n}.$$

Пусть событие A произошло. Найдем условную вероятность $P(B/A)$. Так как событие A произошло, то общее число элементарных событий сократилось с n до m. Из этих m элементарных событий только k благоприятствуют появлению события B. Следовательно,

$$P(AB)=\frac{k}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{m}=P(A)\cdot P(B/A).$$

Аналогично доказывается, что

$$P(AB)=P(B)P(A/B).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Вероятность произведения *двух независимых* событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \tag{5.5}$$

Последняя теорема обобщается на случай произведения конечного числа событий:

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1A_2)\cdots P(A_n / A_1A_2\ldots A_n).$$

Следствие 2. Вероятность произведения независимых в совокупности событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1A_2A_3 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{5.6}$$

Следствие 3. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, будет

$$P = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n). \tag{5.7}$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{5.8}$$

Доказательство. Теорему докажем для случая, когда число элементарных исходов конечно и равно n. На рис. 5.5 каждое элементарное событие изображено точкой.

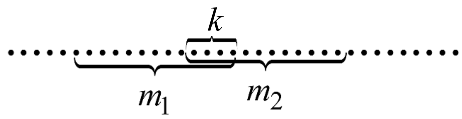


Рис. 5.5. Схематическое изображение совместных событий

Пусть число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно m_1, событию B – m_2 и k – совместному появлению событий A и B. Тогда

$$P(A) = \frac{m_1}{n},\ P(B) = \frac{m_2}{n},\ P(AB) = \frac{k}{n}.$$

Учитывая это, получаем

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2 - k}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{k}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема доказана.

☒ *ПРИМЕР 9.* Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка − 0,6, для второго – 0,8. Найти вероятность следующих событий: A – в мишень попадут оба стрелка; B – в мишень попадет только один стрелок; C – ни один стрелок не попадет в мишень; D – в мишень попадет хотя бы один стрелок.

Решение. Обозначим события: $A_i (i = 1,2)$ – i-й стрелок попал в мишень; $\overline{A}_i (i = 1,2)$ – i-й стрелок не попал в мишень. Тогда события A, B и C можно представить в виде

$$A = A_1 A_2;\ B = A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2;\ C = \overline{A}_1 \overline{A}_2.$$

Вероятность попадания в мишень каждого из стрелков не зависит от того, попал или нет в мишень другой стрелок. Значит, по теореме вероятности произведения независимых событий (формула (5.5)) и теореме о вероятности суммы несовместных событий (формула (5.3)) получим

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A}_2);\ P(B) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2);$$
$$P(C) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2).$$

Так как по условию задачи $P(A_1) = p_1 = 0,6;\ P(A_2) = p_2 = 0,8,$ то для противоположных событий

$$P(\overline{A}_1) = q_1 = 1 - p_1 = 0,4;\ \ P(\overline{A}_2) = q_2 = 1 - p_2 = 0,2.$$

Следовательно,

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48;\ \ P(B) = 0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,44;$$

$$P(C) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08.$$

Полученный результат можно проконтролировать следующим образом. Так как события A, B и C образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей должна быть равна 1. Действительно, $P(A) + P(B) + P(C) = 0,48 + 0,44 + 0,08 = 1,0.$

Поскольку события D и C противоположные, т. е. $D = \overline{C},$ то

$$P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,08 = 0,92.$$

Вероятность этого события можно найти и другим способом. Поскольку $D = A + B$ и события A и B несовместные, то

$$P(D) = P(A) + P(B) = 0,48 + 0,44 = 0,92.$$

☒ *ПРИМЕР 10.* Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор последовательно один за другим задает три вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на предложенные три вопроса.

Решение. Пусть $A_i (i = 1, 2, 3)$ – событие, состоящее в том, что студент знает i-й вопрос; B – событие, состоящее в том, что студент знает все три предложенных вопроса. Тогда $B = A_1 A_2 A_3$. По формуле (5.1) $P(A_1) = \frac{20}{25}$. Если событие A_1 произошло, то у экзаменатора осталось 24 вопроса, из которых студент знает 19, т. е. вероятность события A_2 следует вычислять с учетом того, что произошло событие A_1. Поэтому $P(A_2 / A_1) = \frac{19}{24}$. Аналогично вычисляем $P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{18}{23}$. Тогда

$$P(B) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \approx 0,496.$$

☒ *ПРИМЕР 11.* Три станка работают независимо один от другого. Вероятности безотказной работы в течение смены: для первого станка – 0,8; второго – 0,9; третьего – 0,7. Найти вероятность того, что за смену: а) не откажет только один станок; б) откажет хотя бы один станок.

Решение. Введем в рассмотрение следующие события:

A – событие, состоящее в том, что в течение смены не откажет только один станок;

B – в течение смены откажет хотя бы один станок;

$A_i (i = 1, 2, 3)$ – в течение смены не откажет – i-й станок;

$\overline{A}_i (i = 1, 2, 3)$ – в течение смены откажет – i-й станок

а) Событие A, записанное через события A_i и $\overline{A}_i$ будет

$$A = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3.$$

Так как события $A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$, $\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3$, $\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$ несовместны, а события $A_1, \overline{A}_1, A_2, \overline{A}_2, A_3, \overline{A}_3$ независимы, то, применяя формулы (5.3) и (5.6), получаем искомую вероятность:

$$P(A) = P(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = P(A_1) P(\overline{A}_2) P(\overline{A}_3) +$$
$$+ P(\overline{A}_1) P(A_2) P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) P(A_3) = 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,3 +$$
$$+ 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,7 = 0,092.$$

б) Противоположным событию B будет событие, состоящее в том, что в течение смены не откажет ни один станок. Вероятность события B вычислим по формуле (5.7):

$$P(B) = 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1 - 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,496.$$

Следствием сформулированных выше теорем является формула полной вероятности.

Теорема (Формула полной вероятности). Пусть событие A может произойти только при наступлении одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образующих полную группу попарно несовместных событий, называемых ***гипотезами.*** Тогда вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i). \qquad (5.9)$$

Доказательство. События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу несовместных событий, следовательно, событие A может появиться только в комбинации с одной из гипотез, т. е.

$$A = AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n.$$

Применяя теоремы о вероятности суммы несовместных событий и вероятности произведения событий, получаем искомую формулу

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i).$$

Теорема доказана.

Замечание. Для контроля вычислений используют тот факт, что гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу несовместных событий, а следовательно, $\sum_{k=1}^{n} P(H_k) = 1.$

⌧ *ПРИМЕР 12.* На склад поступают одинаковые детали, изготовленные на трех станках. Известно, что 30% деталей производится первым станком, 25% – вторым и 45% – третьим. Среди деталей, изготовленных первым станком, бракованных 1%, вторым – 2%, третьим – 4%. Найти вероятность того, что наудачу взятая на складе деталь оказалась бракованной.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что наудачу взятая на складе деталь оказалась бракованной. Нам неясно, каким станком она была изготовлена. Введем в рассмотрение гипотезы:

H_1 – деталь изготовлена первым станком;

H_2 – деталь изготовлена вторым станком;

H_3 – деталь изготовлена третьим станком.

Из условий задачи легко находятся вероятности:

$$P(H_1)=\frac{30\%}{100\%}=0,3;\quad P(A/H_1)=\frac{1\%}{100\%}=0,01;$$

$$P(H_2)=\frac{25\%}{100\%}=0,25;\quad P(A/H_2)=\frac{2\%}{100\%}=0,02;$$

$$P(H_3)=\frac{45\%}{100\%}=0,45;\quad P(A/H_3)=\frac{4\%}{100\%}=0,04.$$

Контроль: $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=0,3+0,25+0,45=1$.

По формуле полной вероятности находим вероятность того, что наудачу взятая на складе деталь оказалась бракованной:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=0,3\cdot 0,01+0,25\cdot 0,02+0,45\cdot 0,04=0,026.$$

ПРИМЕР 13. Имеется две урны. В первой урне десять белых и пять красных шаров. Вторая урна пустая. Последовательно по одному перекладывается два шара из первой урны во вторую. После чего из второй урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он будет белым.

Решение. Пусть событие A – из второй урны извлечен белый шар. Но нам не ясно, какие шары находятся во второй урне. Можно сделать три предположения – гипотезы:

H_1 – во второй урне два белых шара;

H_2 – во второй урне один белый и один красный шар;

H_3 – во второй урне два красных шара.

Введем вспомогательные события:

A_1 – первый, переложенный из первой урны шар, белый;

A_2 – второй, переложенный из первой урны шар, белый.

Тогда $H_1=A_1A_2$; $H_2=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$; $H_3=\overline{A}_1\overline{A}_2$.

Поскольку события $A_1,\overline{A}_2$ и $\overline{A},A_2$ зависимы, а события $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1A_2$ несовместны, то, применяя формулы (5.3) и (5.6), имеем

$$P(H_1)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2/A_1)=\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\approx 0,429;$$

$$P(H_2)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2/A_1)+$$

$$+P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1)=\frac{10}{15}\cdot\frac{5}{14}+\frac{5}{15}\cdot\frac{10}{14}\approx 0,476;$$

$$P(H_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2/\overline{A}_1)=\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\approx 0,095.$$

Вычислим условные вероятности события A при осуществлении гипотез:

$$P(A/H_1)=\frac{2}{2}=1;\quad P(A/H_2)=\frac{1}{2};\quad P(A/H_3)=\frac{0}{2}=0.$$

По формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_2)P(A/H_2)=$$

$$=0,429\cdot 1+0,427\cdot\frac{1}{2}+0,095\cdot 0=0,6425.$$

Формулы Байеса. Пусть событие A может произойти только при наступлении одной из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образующих полную группу попарно несовместных событий. И известны вероятности гипотез $P(H_i),\ i=\overline{1,n}.$ Вероятность появления события A вычисляется по формуле полной вероятности (5.9).

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Возникает вопрос: как изменились вероятности гипотез в связи с тем, что событие A уже наступило? Нам нужно найти вероятности гипотез при условии, что событие A уже наступило.

По теореме умножения вероятностей имеем

$$P(AH_i)=P(A)P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i),$$

откуда непосредственно получаем

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$$

или с применением формулы полной вероятности

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)},\tag{5.10}$$

которые называются ***формулами Байеса***.

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Замечание. Вероятности $P(H_i), i=\overline{1,n}$ гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ до опыта называются ***априорными вероятностями*** (от латинского *a priori*, что означает «*сперва*», т. е. в данном случае до того, как был произведен опыт). Вероятности $P(H_i / A), i=\overline{1,n}$ тех же событий называются ***апостериорными*** (от латинского *aposteriori*, что означает «*после*», в данном случае после опыта).

⌧ *ПРИМЕР 14.* Случайным образом вызывается один из трех стрелков на линию огня и производит два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3; для второго – 0,5; третьего – 0,8. Был вызван стрелок, произведены два выстрела. В результате мишень не поражена. Кто вероятнее всего стрелял по мишени?

Решение. Пусть событие A – мишень не поражена. Из условия задачи следует, что вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна $1-0,3=0,7$; второго – 0,5; третьего – 0,2. Возможны три гипотезы:

H_1 – на линию огня вызван первый стрелок;

H_2 – на линию огня вызван второй стрелок;

H_3 – на линию огня вызван третий стрелок.

Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

Условные вероятности события A при сделанных гипотезах равны:

$$P(A / H_1)=0,7\cdot 0,7=0,49;$$

$$P(A / H_2)=0,5\cdot 0,5=0,25;$$

$$P(A / H_3)=0,2\cdot 0,2=0,04.$$

По формуле Байеса (5.10) находим вероятности осуществления гипотез:

$$P(H_1 / A)=\frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(H_1)P(A / H_1)+P(H_2)P(A / H_2)+P(H_3)P(A / H_3)}=$$

$$=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,49}{\frac{1}{3}\cdot 0,49+\frac{1}{3}\cdot 0,25+\frac{1}{3}\cdot 0,04}=\frac{0,49}{0,78}=0,628;$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,25}{0,26}=0,321;$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,04}{0,26}=0,051.$$

Отсюда получаем, что с набольшей вероятностью был вызван первый стрелок.

5.7. Повторение испытаний. Схема Бернулли

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с постоянной вероятностью p или не появиться с вероятностью $q=1-p$. В этом случае говорят, что имеет место ***схема испытаний Бернулли.***

Вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно k раз (безразлично в каком порядке) $(0\le k\le n)$, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{5.11}$$

где C_n^k – число сочетаний из n элементов по k элементов.

Вывод формулы Бернулли. Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n-k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k q^{n-k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k, т. е. C_n^k. Так как эти сложные события несовместные то по теореме сложения вероятностей несовместных событий, искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то вероятность (появления k раз события A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

⌧ *ПРИМЕР 15.* Стрелок производит пять выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле $p = 0,8$. Найти вероятность того, что будет ровно три попадания.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли. Так как в нашем случае $n = 5$, $k = 3$, $q = 1 - 0,8 = 0,2$, то

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,2048.$$

Среди вероятностей $P_n(0), P_n(1), P_n(2), ..., P_n(n)$ есть наибольшее число. Число k_0, при котором вероятность $P_n(k_0)$ наибольшая, называется ***наивероятнейшим числом наступления события*** A. Число k_0 – целое. Оно определяется из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p. \qquad (5.12)$$

⌧ *ПРИМЕР 16.* Завод выпускает 90% продукции высшего сорта. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 140 изделий.

Решение. Вероятность того, что изделие будет высшего сорта $p = \frac{90\%}{100\%} = 0,9$. Вероятность того, что изделие не будет высшего сорта $q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$. Число всех изделий $n = 140$. По формуле (5.12) получаем $126 - 0,1 < k_0 < 126 + 0,9$. Следовательно, наивероятнейшее число $k_0 = 126$.

При больших значениях чисел m и k пользоваться формулой Бернулли нереально. В этих случаях применяют асимптотическую формулу Муавра – Лапласа:

Локальная теорема Муавра – Лапласа. Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний существенно отличается от нуля и единицы, а число испытаний n достаточно велико, то вероятность $P_n(k)$ приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (5.13)$$

Функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

называется функцией Гаусса. Ее значения записаны в специальных таблицах (прил. 1), причем $\varphi(-x) = \varphi(x)$ – функция четная, и на практике обычно полагают что при $x \geq 4$, $\varphi(x) \approx 0$.

☒ *ПРИМЕР 17.* Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орел выпадет ровно 200 раз.

Решение. В нашем случае $n = 400$, $k = 200$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$. Ввиду большого количества испытаний используем локальную теорему Муавра – Лапласа (5.13):

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{200 - 400 \cdot 0{,}5}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 0, \ \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989,$$

$$P_{400}(200) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \varphi(0) \approx \frac{1}{10} \cdot 0{,}3989 = 0{,}03989.$$

Полученный результат очень близок к точному значению $P_{400}(200) = 0{,}0398693019637926$, вычисленному по формуле Бернулли.

Интегральная теорема Муавра – Лапласа. Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний существенно отличается от нуля и единицы, а число испытаний n достаточно велико, то вероятность $P_n(k_1 \leq k < k_2)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1 \leq k < k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (5.14)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)$ – функция Лапласа, которая будет рассмотрена более подробно при изучении нормального закона распределения. Отметим только, что функция нечетная $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и для ее составлены таблицы значений (прил. 2).

ПРИМЕР 18. Вероятность появления события A в каждом из 600 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что событие A в этих испытаниях наступит: а) ровно 330 раз; б) не менее 330 и не более 375 раз.

Решение. а) По условию задачи $n = 600$ – велико; $p = 0,6$ – не близко к нулю и единице $q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4$; $k = 330$. Применим локальную формулу Муавра – Лапласа (5.13). Вычисляем значение x:

$$x = \frac{330 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -\frac{30}{12} = -2,5.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ (прил. 1) находим $\varphi(-2,5) = \varphi(2,5) \approx 0,0175$. По локальной формуле Муавра – Лапласа (5.13) найдем искомую вероятность:

$$P_{600}(330) \approx \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} \cdot 0,0175 = \frac{1}{12} \cdot 0,0175 \approx 0,0015.$$

б) Поскольку число испытаний n = 600 велико, и нужно найти вероятность числа появления события из промежутка [330; 375], то используем интегральную формулу Муавра – Лапласа. По условию задачи $n = 600; p = 0,6; q = 0,4; k_1 = 330; k_2 = 375$.

Находим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{330 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -2,5; \quad x_2 = \frac{375 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = 1,25.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (прил. 2) находим, что

$$\Phi(-2,5) = -\Phi(2,5) \approx -0,4938; \Phi(1,25) \approx 0,3944.$$

По интегральной формуле Муавра – Лапласа (5.14) искомая вероятность

$$P_{600}(330 \le k \le 375) \approx \Phi(1,25) - \Phi(-2,5) \approx 0,3944 - (-0,4938) = 0,8882.$$

Если в схеме Бернулли вероятность p мала (речь идет о «*редком*» событии), а число испытаний n достаточно велико, то используют ***асимптотическую формулу Пуассона:***

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda = np, k = 0,1,2,...,n. \qquad (5.15)$$

Условия применимости этой формулы: p одного порядка с $\frac{1}{n}$ или $p < 0{,}1$.

☒ *ПРИМЕР 19.* Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение одной минуты позвонят: а) ровно три абонента; б) менее трех абонентов; в) хотя бы один абонент.

Решение. По условию $n = 100$, $p = 0{,}01$. Поскольку число n велико, вероятность p мала, а рассматриваемые события (звонки абонентов) независимы, то применима формула Пуассона (5.15). Найдем $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$.

а) Вероятность того, что позвонят ровно три $(k = 3)$ абонента:

$$P_{100}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} \approx 0{,}0613.$$

б) Вероятность того, что позвонят менее трех абонентов, т. е. либо два, либо один, либо ни одного:

$$P_{100}(k < 3) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) = \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} =$$

$$= e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{5}{2} e^{-1} \approx \frac{5}{2} \cdot 0{,}36788 = 0{,}9197.$$

в) Найдем вероятность $P_{100}(k \geq 1)$ того, что позвонит хотя бы один абонент. События $\{k \geq 1\}$={позвонит хотя бы один абонент} и $\{k < 1\}$={ни один абонент не позвонит} – противоположные, поэтому

$$P_{100}(k \geq 1) = 1 - P_{100}(k < 1) = 1 - P_{100}(0) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}6321.$$

5.8. Случайные величины. Дискретные случайные величины

Случайной величиной (СВ) называют величину, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин.

Примеры СВ.

1. Число выпавших очков при однократном бросании игральной кости есть СВ, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. Число выбранных тузов при вытаскивании из колоды 6 карт, есть СВ, она может принять одно из значений: 0, 1, 2, 3, 4.

3. Погрешность, взятая по абсолютной величине, при округлении до целого числа есть СВ, она может принять одно из значений из промежутка $[0; 0,5]$.

В принципе любое случайное событие можно рассматривать как СВ с двумя возможными значениями 0 и 1. Она принимает значение 0, если событие не произошло и 1 – если событие произошло.

СВ обычно обозначают греческими буквами ξ, η, ς и т. д. или заглавными буквами X, Y, Z, … латинского алфавита, а их возможные значения – строчными буквами латинского алфавита: x, y, z … (возможны индексы). СВ делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретной называют СВ, если ее возможные значения можно пронумеровать. Дискретная СВ принимает изолированные значения.

В рассмотренных примерах 1, 2 СВ дискретные.

Непрерывной называют СВ, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка (как в примере 3).

Для полного описания СВ необходимо задать не только ее возможные значения, но и указать вероятности, с какими СВ принимает эти значения. Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и соответствующими им вероятностями, называется ***законом распределения СВ***. Способы и формы представления закона распределения могут быть различными.

Пусть ξ – дискретная СВ с возможными значениями $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. События $\{\xi = x_1\}, \{\xi = x_2\}, ..., \{\xi = x_n\}, ...$ несовместны, так как (по определению) СВ ξ в результате опыта должна принять только одно значение из них. Так как эти события образуют полную группу несовместных событий, то

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + ... = 1, \text{ где } p_i = P(\xi = x_i).$$

Условие $\sum_{i=1} P(\xi = x_i) = 1$ называется ***условием нормировки.*** Чаще всего закон распределения дискретной СВ задают в виде таблицы (табл. 5.2). При табличном способе задания дискретной СВ в первой строке указывают ее возможные значения, а во второй строке их вероятности.

Таблица 5.2

Ряд распределения дискретной СВ

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
p	p_1	p_2	…	p_n	…

Сумма элементов второй строки таблицы должна равняться единице (*условие нормировки*).

Такую таблицу называют ***рядом распределения дискретной СВ*** ξ.

Для наглядности закон распределения дискретной СВ можно изобразить графически. В прямоугольной системе координат все возможные значения откладывают по оси абсцисс, а по оси ординат – соответствующие им вероятности. Вершины полученных ординат соединяют отрезками прямых.

Такая фигура называется ***полигоном*** (***многоугольником***) ***распределения*** вероятностей дискретной СВ ξ (рис. 5.6). Вершины соединяют ломаной только для наглядности, так как СВ ξ между возможными значениями x_i и x_{i+1} значений не принимает.

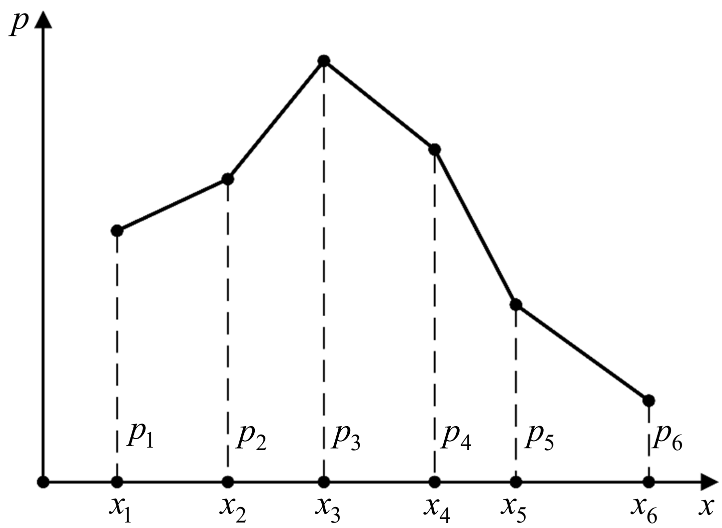


Рис. 5.6. Полигон распределения СВ ξ

☒ *ПРИМЕР 20.* Записать закон распределения СВ ξ – числа выстрелов до первого попадания, если вероятность попадания при любом выстреле постоянна и равна p.

Решение. Возможные значения этой СВ есть множество натуральных чисел 1, 2, 3, … . Так как их счетное число, то это дискретная СВ. Вероятности возможных значений

$$P(\xi=1)=p,\ P(\xi=2)=q\,p,\ P(\xi=2)=q^2 p,...,P(\xi=n)=q^{n-1}p,$$

где $q=1-p$. Тогда ряд распределения СВ записан в виде

x_i	1	2	3	…	n	…
p_i	p	qp	qp^2	…	$q^{n-1}p$	…

Так как

$$\sum_{i=0}^{+\infty} q^i p = p+qp+q^2p+\dots+q^{n-1}p+\dots = p(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+\dots)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{сумма членов бесконечной геометрической}\\ \text{прогрессии со знаменателем } q<1\end{array}\right| = p\cdot\frac{1}{1-q}=p\cdot\frac{1}{p}=1,$$

то условие нормировки для построенного ряда распределения СВ выполнено.

Законы распределения как дискретных, так и непрерывных случайных величин можно задать с помощью функции распределения $F(x)$.

☑ *Определение.* ***Функцией распределения*** *СВ* ξ называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что СВ ξ примет значение, меньшее x:

$$F(x)=P(\xi<x). \qquad (5.16)$$

Замечание. Функцию распределения $F(x)$ также называют ***интегральной функцией распределения*** или ***интегральным законом*** распределения СВ ξ.

Значение $F(x)$ есть вероятность того, что СВ примет значение из полубесконечного интервала $(-\infty;\,x)$ изображенного на рис. 5.7.

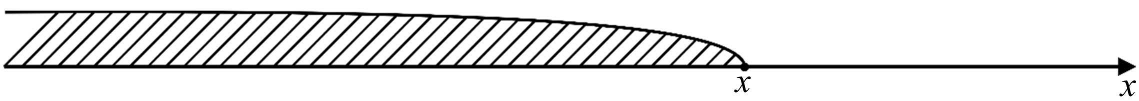


Рис. 5.7. Полубесконечный интервал $(-\infty;\,x)$

Отметим следующие свойства $F(x)$:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ – неубывающая и непрерывная слева функция, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$ и $F(x-0) = F(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

4) $P(\alpha \le \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$; (5.17)

5) $P(\xi = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0)$.

При решении задач наиболее часто используется свойство 4 – вероятность попадания в заданный интервал.

ПРИМЕР 21. Задан закон распределения СВ ξ

ξ	20	30	40	50
p	0,1	0,6	0,1	0,2

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение. Найдем значение функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$ для каждого действительного x. Из ряда распределения видно, что СВ ξ может принимать с ненулевой вероятностью только значения 20, 30, 40, 50. Вероятности остальных значений x равны 0. Для вычисления вероятностей $P(\xi < x)$ нужно определить, какие значения x_i СВ ξ удовлетворяют неравенству $x_i < x$, и просуммировать их вероятности. В зависимости от значения x получим:

– если $x \le 20$ $F(x) = 0$, так как ни одно из значений 20, 30, 40, 50 с ненулевой вероятностью не удовлетворяет указанному неравенству;

– если $20 < x \le 30$ $F(x) = P(\xi = 20) = 0{,}1$ (условию $x_i < x$ удовлетворяет только значение $x_i = 20$);

– если $30 < x \le 40$ $F(x) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) = 0{,}1 + 0{,}6 = 0{,}7$ (значения 20 и 30 удовлетворяют неравенству $x_i < x$);

– если $40 < x \le 50$ $F(x) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) + P(\xi = 40) = 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}8$ (значения 20, 30 и 40 удовлетворяют неравенству $x_i < x$);

– если $x > 50$ $F(x) = P(\xi = 20) + P(\xi = 30) + P(\xi = 40) + P(\xi = 50) = 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$ (значения 20, 30, 40 и 50 удовлетворяют неравенству $x_i < x$).

$$\text{Получаем: } F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 20,\\ 0{,}1, & \text{если } 20<x\le 30,\\ 0{,}7, & \text{если } 30<x\le 40,\\ 0{,}8, & \text{если } 40<x\le 50,\\ 1, & \text{если } x>50.\end{cases}$$

График функции распределения представлен на рис. 5.8.

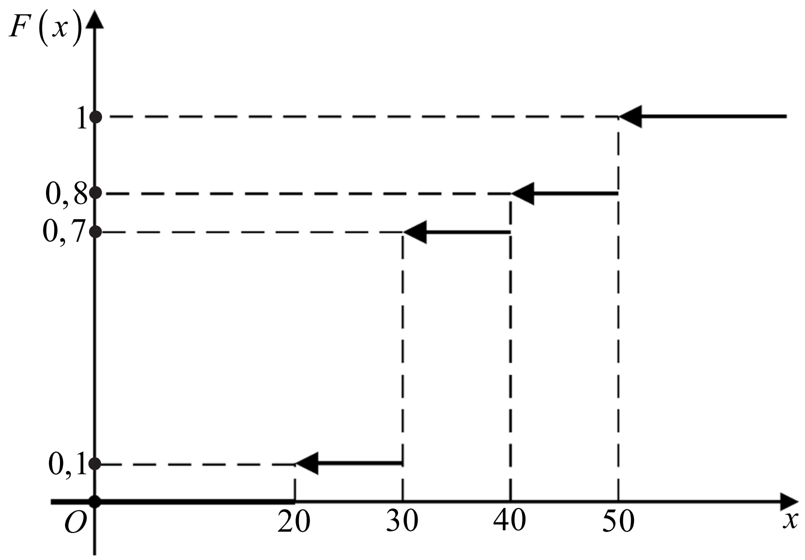


Рис. 5.8. График функции распределения $F(x)$ примера 21

Из рисунка видно, что функция $F(x)$ терпит разрывы в точках возможных значений СВ x_i = 20; 30; 40; 50, на промежутках между возможными значениями постоянная, в точках x_i непрерывное слева и является неубывающей функцией.

5.9. Непрерывные случайные величины

Возможные значения непрерывной СВ сплошь заполняют всю числовую ось или некоторую ее часть, и мы не можем составить перечень этих значений и построить ряд распределения, т. е. для непрерывной СВ понятие ряда распределения не существует.

Непрерывную СВ задают с помощью функции распределения $F(x)$ или функции $p(x)$ – плотности распределения вероятностей. Для непрерывной СВ функция распределения $F(x)$ непрерывная и дифференцируемая. Вероятность того, что непрерывная СВ примет одно заданное определенное значение x_0 равна нулю $P(x_0)=0$.

По формуле (5.17), вероятность того, что СВ ξ примет значение из промежутка $[x;\, x+\Delta x]$, будет

$$P(x \le \xi \le x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta F(x).$$

Рассмотрим отношение этой вероятности к длине Δx промежутка $[x;\, x+\Delta x]$, т. е. среднюю вероятность, приходящуюся на единицу длины на этом промежутке. Будем приближать Δx к нулю. В пределе мы получим производную от функции распределения $F(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x),$$

которую можем рассматривать как плотность вероятности СВ ξ в точке x.

☑*Определение.* ***Плотностью распределения вероятностей непрерывной СВ*** ξ называется функция $p(x)$, такая, что

$$p(x) = F'(x). \tag{5.18}$$

Замечание. Функция $p(x)$ также называется ***дифференциальной функцией распределения СВ*** ξ.

Свойства функции $p(x)$:

1) $p(x) \ge 0$, т. е. плотность распределения неотрицательна;

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1. \tag{5.19}$$

Формула (5.19) называется ***условием нормировки***;

3) интегральная функция распределения выражается через функцию плотности распределения вероятностей $p(x)$ по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt; \tag{5.20}$$

4) при решении задач часто используется следующая формула:

$$P(a \le \xi < b) = \int_{a}^{b} p(x)\,dx. \tag{5.21}$$

Выведем эту формулу

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} p(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} p(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} p(t)\,dt + \int_{\alpha}^{b} p(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} p(t)\,dt = \int_{a}^{b} p(t)\,dt.$$

Замечание 1. Так как

$$P(a < \xi < b) = P(a \le \xi < b) = P(a < \xi \le b) = P(a \le \xi \le b),$$

то формула (5.21) используется для их вычисления – вероятности попадания в заданный интервал, полуинтервал, отрезок.

Замечание 2. Интегральная функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин, в то время как функция плотности распределения вероятностей только для непрерывных случайных величин.

График функции $y = p(x)$ называется кривой плотности распределения вероятностей случайной величины ξ или просто кривой распределения вероятностей СВ.

Геометрически свойство нормировки (5.19) означает, что площадь области, ограниченной графиком кривой плотности вероятностей и осью Ox, равна 1. Эта кривая всегда лежит в верхней координатной полуплоскости. Вероятность того, что случайная величина ξ примет значение из промежутка $[a; b]$, равна площади соответствующей заштрихованной криволинейной трапеции (рис. 5.9).

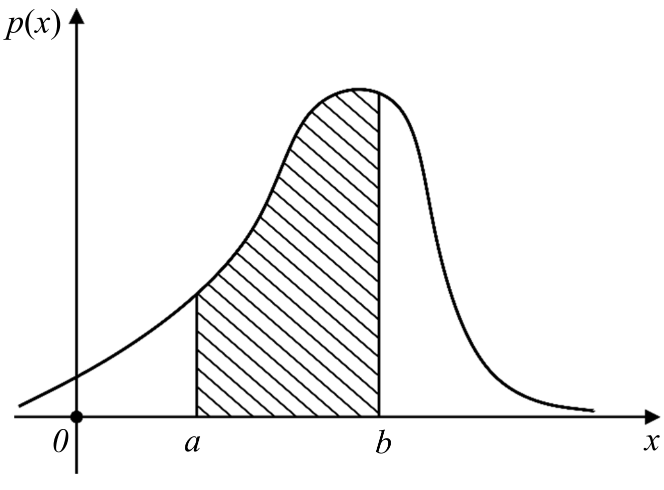


Рис. 5.9. Криволинейная трапеция

⌧ *ПРИМЕР 22.* Плотность распределения вероятностей СВ задана функцией $p(x) = \dfrac{a}{1 + x^2}$. Найти:

1) параметр a и функцию распределения $F(x)$;

2) $P(1 < \xi < \sqrt{3})$.

Решение.

1) Первоначально из условия нормировки (5.19) найдем параметр a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = a \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= a\pi = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}.$$

По формуле (5.20) найдем функцию распределения $F(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{x} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2};$$

2) $P(1 < \xi < \sqrt{3}) = F(\sqrt{3}) - F(1) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 1 - \dfrac{1}{2} =$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{12}.$$

⌧ *ПРИМЕР 23.* Дана функция распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1, \\ a\,(x^2 - 1), & \text{если} \quad 1 < x \le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти: a, $P(1 \le \xi \le 2{,}5)$, $p(x)$ и построить графики функции распределения и плотности распределения вероятностей.

Решение. Значение параметра a может быть получено из условия нормировки для плотности вероятностей. Вначале найдем плотность вероятностей $p(x)$ как производную от функции распределения $F(x)$:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1, \\ 2ax, & \text{если} \quad 1 < x \le 3, \\ 0, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

По условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{3} 2axdx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = ax^2 \Big|_1^3 = 8a = 1.$$

Следовательно, $a = \dfrac{1}{8}$.

Подставляя найденное a, получаем следующие выражения для функции распределения и плотности распределения данной СВ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1, \\ \dfrac{1}{8}(x^2 - 1), & \text{если} \quad 1 < x \le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1, \\ \dfrac{1}{4}x, & \text{если} \quad 1 < x \le 3, \\ 0, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

Графики функции распределения $F(x)$ и функции плотности вероятностей $p(x)$ изображены на рис. 5.10.

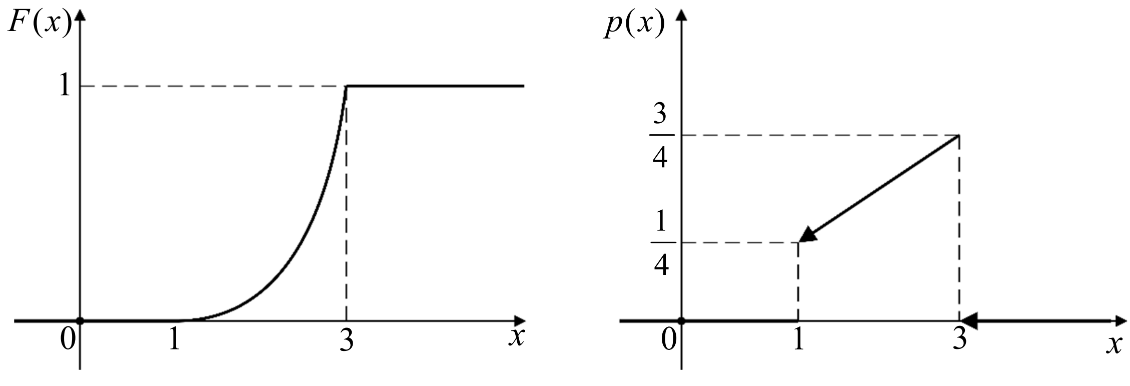


Рис. 5.10. Графики:
а – функции распределения $F(x)$; *б* – плотности распределения вероятностей $p(x)$ примера 23

Вероятность $P(1 \le \xi \le 2{,}5)$ вычислим с помощью функции распределения:

$$P(1 \le \xi \le 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1) = \frac{1}{8}((2{,}5)^2 - 1) - 0 = \frac{21}{32}.$$

5.10. Числовые характеристики случайных величин

Знание закона распределения дает полное с вероятностной точки зрения представление о случайной величине. Однако при решении ряда практических задач нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Достаточно указать некоторые черты закона распределения. Для этих целей используют числовые характеристики случайной величины. Условно их делят на числовые характеристики положения и числовые характеристики разброса значений СВ.

Первоначально рассмотрим арифметические действия над СВ.

Пусть СВ ξ_1 и ξ_2 заданы законами распределения (табл. 5.3, 5.4).

Таблица 5.3

Закон распределения СВ ξ_1

ξ_1	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Таблица 5.4

Закон распределения СВ ξ_2

ξ_2	x_1	x_2	…	x_m
p	q_1	q_2	…	q_m

☑*Определение.* Две СВ называются ***независимыми***, если закон распределения одной не зависит от того, какие значения приняла другая.

☑*Определение.* ***Произведением*** независимых СВ ξ_1 и ξ_2 назывют случайную величину $\xi_1\xi_2$, всевозможные значения которой равны всевозможным произведениям значений ξ_1 и ξ_2, а вероятности – произведениям соответствующих вероятностей табл. 5.5.

Таблица 5.5

Ряд распределения произведения СВ

$\xi_1\xi_2$	x_1y_1	x_1y_2	…	x_1y_m	x_2y_1	x_2y_1	…	x_2y_m	…	x_ny_m
p	p_1q_1	p_1q_2	…	p_1q_m	x_2y_1	p_2q_2	…	p_2q_m	…	p_nq_m

☑*Определение.* ***Алгебраической суммой*** СВ ξ_1 и ξ_2 называют СВ $\xi_1 \pm \xi_2$, ряд распределения которой задан табл. 5.6.

Таблица 5.6

Ряд распределения суммы СВ

$\xi_1 \pm \xi_2$	$x_1 \pm y_1$	…	$x_1 \pm y_m$	$x_2 \pm y_1$	…	$x_2 \pm y_m$	…	$x_n \pm y_1$	…	$x_n \pm y_m$
p	p_1q_1	…	p_1q_m	p_2q_1	…	p_2q_m	…	p_nq_1	…	p_nq_m

☑*Определение.* ***Произведением СВ*** ξ на число c называют СВ $c\xi$, ряд распределения которой задан табл. 5.7.

Таблица 5.7

Ряд распределения произведения СВ на число *C*

$C\xi$	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n
p	p_1	p_2	…	p_n

☑*Определение.* ***k-й степенью СВ*** ξ называют СВ ξ^k, ряд распределения которой задан табл. 5.8.

Таблица 5.8

Ряд распределения степени СВ

ξ^k	$x_1^{\ k}$	$x_2^{\ k}$	…	$x_n^{\ k}$
p	p_1	p_2	…	p_n

Основные числовые характеристики СВ:

1) математическое ожидание обозначается $M(\xi)$ или M_ξ;

2) дисперсия обозначается $D(\xi)$ или D_ξ;

3) среднеквадратическое отклонение обозначается $\sigma(\xi)$ или σ_ξ.

☑*Определение.* ***Математическим ожиданием*** $M(\xi)$ ***дискретной*** СВ ξ называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (5.22)$$

☑*Определение.* ***Математическим ожиданием*** $M(\xi)$ ***непрерывной*** СВ, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a; b]$ называют определенный интеграл:

$$M(\xi) = \int_a^b x\,p(x)\,dx. \quad (5.23)$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx. \quad (5.24)$$

Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что оно приближенно равно среднему ожидаемому значению случайной величины.

Свойства математического ожидания

1. $M(C) = C; \quad C = \text{const}.$
2. $M(C\xi) = C \cdot M(\xi); \quad C = \text{const}.$
3. $M(\xi_1 \pm \xi_2) = M(\xi_1) \pm M(\xi_2).$
4. $M(\xi - M(\xi)) = 0.$
5. $M(\xi_1 \xi_2) = M(\xi_1) \cdot M(\xi_2)$ для независимых случайных величин.

Однако математическое ожидание не полностью характеризует случайную величину. Рассмотрим две случайные величины ξ_1 и ξ_2, заданные следующими рядами распределения.

ξ_1	2	3	4
p	0,5	0,2	0,3

ξ_2	–2	1	2	6	8
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

$M(\xi_1) = 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 = 2{,}8.$

$M(\xi_2) = -2 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}1 = 2{,}8.$

Мы видим, что математическое ожидание этих величин одинаковое, хотя возможные значения их имеют существенное различие. Для СВ ξ_1 они расположены достаточно близко от математического ожидания, в то время как для СВ ξ_2 – на значительном расстоянии. Для описания данного факта в теории вероятностей служит числовая характеристика, называемая ***дисперсией.***

Отклонением случайной величины ξ от ее математического ожидания называют разность $\xi - M(\xi)$ между значениями случайной величины и ее математическим ожиданием.

☑ *Определение.* ***Дисперсией*** ξ называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(\xi) = M\left(\left(x_i - M(\xi)\right)^2\right). \tag{5.25}$$

Для дискретной СВ дисперсия вычисляется по формуле

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(\xi))^2\, p_i. \tag{5.26}$$

Для непрерывной СВ дисперсия будет

$$D(\xi) = \int_a^b \left(x_i - M(\xi)\right)^2 p(x)\,dx, \tag{5.27}$$

если возможные значения принадлежат отрезку $[a; b]$, и

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - M(\xi)\right)^2 p(x)\,dx, \tag{5.28}$$

если возможные значения принадлежат всей оси Ox.

Свойства дисперсии

1. $D(C) = 0; C = \text{const};$
2. $D(C\xi) = C^2 \cdot D(\xi)\; C = \text{const};$
3. $D(\xi) = M(\xi^2) - \left(M(\xi)\right)^2;$
4. $D(\xi + C) = D(\xi), C = \text{const};$
5. $D(\xi_1 \pm \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$ для независимых СВ.

Замечание. На практике для вычисления дисперсии, как правило, используют свойство 3. Тогда дисперсия вычисляется по следующим формулам:

– для дискретной СВ

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i - M^2(\xi), \tag{5.29}$$

– для непрерывных СВ

$$D(\xi) = \int_a^b x^2 p(x)\,dx - M^2(\xi), \tag{5.30}$$

если возможные значения принадлежат отрезку $[a; b]$, и

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx - M^2(\xi). \qquad (5.31)$$

если возможные значения принадлежат всей оси Ox.

Дисперсия характеризует разброс значений СВ вокруг ее математического ожидания.

☑ *Определение.* ***Средним квадратичным отклонением*** **СВ** ξ называют квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \qquad (5.32)$$

Среднее квадратичное отклонение, как и дисперсия, характеризует разброс значений СВ вокруг ее математического ожидания. В отличие от дисперсии среднее квадратичное имеет размерность самой исходной СВ.

☒ *ПРИМЕР 24.* По данному закону распределения дискретной случайной величины ξ

ξ	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Требуется:

а) найти математическое ожидание $M(\xi)$;

б) дисперсию $D(\xi)$;

в) среднее квадратичное отклонение $\sigma(\xi)$;

г) вероятность $P\left(\xi < M(\xi)\right)$;

д) интегральную функцию распределения $F(x)$;

е) построить график интегральной функции распределения.

Решение.

а) По формуле (5.22) найдем математическое ожидание:

$$M(\xi) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

б) Для того чтобы найти дисперсию, запишем закон распределения случайной величины ξ^2

ξ^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание $M(\xi^2)$:

$$M(\xi^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Искомую дисперсию найдем по формуле (5.29):

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 13,3 - 3,5^2 = 1,05.$$

в) Среднее квадратичное отклонение по формуле (5.32) будет

$$\sigma(\xi) = \sqrt{1,05} \approx 1,025.$$

г) Вычислим вероятность:

$$P\big(\xi < M(\xi)\big) = P(\xi < 3,5) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0,1 + 0,6 = 0,7.$$

д) Интеграционную функцию распределения находим аналогично примеру 16:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ 0,1, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 0,7, & \text{если } 2 < x \le 5, \\ 1,0, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

е) График интегральной функции распределения $F(x)$ изображен на рис. 5.11.

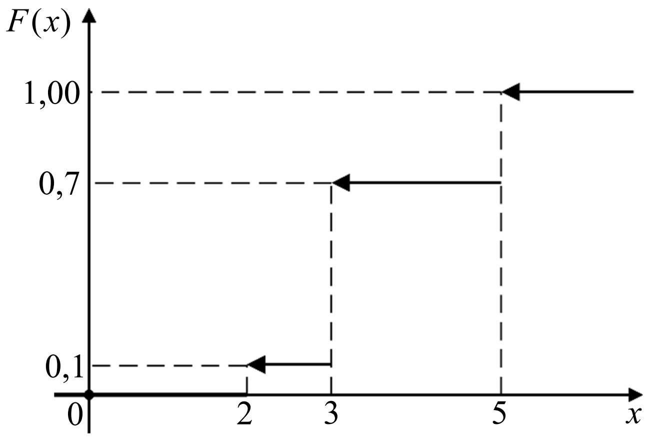


Рис. 5.11. График функции распределения примера 24

ПРИМЕР 25. Непрерывная СВ ξ задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Требуется:

а) найти плотность распределения $p(x)$ вероятностей случайной величины ξ;

б) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $p(x)$;

в) вычислить числовые характеристики: $M(\xi), D(\xi), \sigma(\xi)$;

г) найти $P\left(\left|\xi - M(\xi)\right| < \sigma(\xi)\right)$.

Решение. а) Найдем плотность вероятности $p(x)$ по формуле (5.18):

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

б) Построим графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $p(x)$ (рис. 5.12).

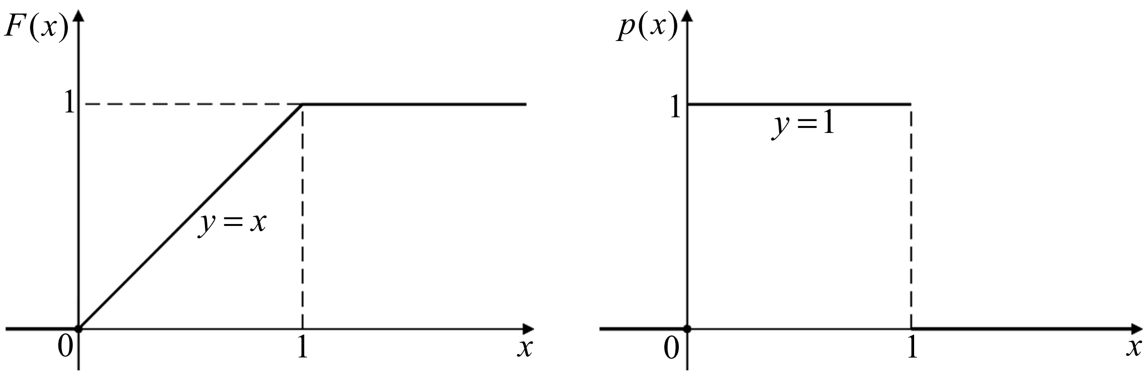


Рис. 5.12. Графики:
а – функции распределения $F(x)$; *б* – плотности распределения $p(x)$
для примера 25

в) Вычислим числовые характеристики:

– математическое ожидание по формуле (5.22):

$$M(\xi) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2};$$

– дисперсию по формуле (5.30):

$$D(\xi) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Среднее квадратичное отклонение будет

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

г) Вероятность находим по формуле (5.17):

$$P\left(\left|\xi-M(\xi)\right|<\sigma(\xi)\right)=P\left(M(\xi)-\sigma(\xi)<\xi<M(\xi)+\sigma(\xi)\right)=$$

$$=P\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}<\xi<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=F\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)-F\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5.11. Некоторые законы распределения случайных величин

При изучении законов распределения СВ обычно рассматривают следующие характеристики:

1) формулы вычисления вероятностей для дискретных СВ или $F(x)$ и $p(x)$ для непрерывных СВ;

2) графики: $F(x)$ и $p(x)$;

3) числовые характеристики: $M(\xi), D(\xi), \sigma(x)$;

4) для непрерывных СВ формулы для вычисления $P(\alpha\le\xi<\beta)$.

Биноминальный закон распределения. Если вероятности возможных значений $k=0,1,\ldots,n$ дискретной СВ ξ вычисляются по формуле Бернулли $p(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, то распределение называется ***биноминальным.***

Ряд распределения биномиальной случайной величины имеет вид

ξ	0	1	2	…	n
p	q^n	pq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}p^2q^{n-2}$	…	p^n

Закон называется биномиальным, так как значения вероятностей совпадают со слагаемыми правой части бинома Ньютона:

$$(q+p)^n=q^n+C_n^1q^{n-1}p+C_n^2q^{n-2}p^2+\cdots+C_n^{n-1}qp^{n-1}+p^n.$$

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$M(\xi) = np;\ D(\xi) = npq;\ \sigma(\xi) = \sqrt{npq}.$$

Выведем эти формулы. Пусть СВ ξ – число появления события A в n испытаниях, а СВ $\xi_i, i = \overline{1,n}$ – число появления события A в i-м испытании. Тогда $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Ряд распределения для СВ $\xi_i, i = \overline{1,n}$ имеет вид

ξ_i	0	1
p	q	p

Откуда для любой СВ $\xi_i, i = \overline{1,n}$:

$$M(\xi_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \quad D(\xi_i) = M(\xi_i^2) - M^2(\xi_i) =$$
$$= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Так как СВ $\xi_i, i = \overline{1,n}$ независимые, то

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n) = np. \quad (5.33)$$

$$D(\xi) = D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \dots + D(\xi_n) = npq. \quad (5.34)$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{npq}.$$

☒ *ПРИМЕР 26.* Производится 15 независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле $p = 0{,}6$. Определить среднее число попаданий и степень разброса числа попаданий.

Решение. СВ – число попаданий в цель, подчиняется биномиальному закону распределения. Ее возможные значения: 0, 1, 2, …,15.

Среднее число попаданий – это математическое ожидание данной СВ. По формуле (5.33): $M(\xi) = np = 15 \cdot 0{,}6 = 9$.

Степень разброса числа попаданий при 15 выстрелах – дисперсия: $D(\xi) = npq = 15 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}4 = 3{,}6$ (формула (5.34)).

Распределение Пуассона. Дискретная СВ ξ имеет ***распределение Пуассона*** с параметром λ, если вероятности принимаемых значений 0, 1, 2, …, n, … вычисляются по формуле Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Математическое ожидание и дисперсия СВ ξ, распределенной по закону Пуассона, равны:

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda.$$

Закон распределения Пуассона (*закон редких явлений*) является хорошим приближением для биномиального распределения при больших значениях n и малых p или $q = 1 - p$.

Примерами СВ, имеющих закон распределения Пуассона, могут служить: число бракованных деталей в большой партии; число полных тезок (совпадают фамилия, имя, отчество) в конкретном городе; число бракованных книг в тираже. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, характеризующейся параметром $\lambda = np$.

⌧ *ПРИМЕР 27.* На АТС (автоматическая телефонная станция) в течение часа в среднем поступает 120 вызовов. Найти вероятность того, что за одну минуту поступит ровно три вызова.

Решение. Введем в рассмотрение СВ ξ, которая выражает число вызовов, поступивших на АТС в течение минуты. СВ ξ распределена по закону Пуассона. Так как в течение минуты среднее число вызовов будет равно 2, то параметр $\lambda = M(\xi) = 2$. Искомая вероятность будет

$$P(\xi = 3) = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} = \frac{4}{3} e^{-2} \approx 0{,}1804.$$

Равномерный закон распределения. В некоторых задачах практики встречаются СВ, все значения которых удовлетворяют условиям: 1) принадлежат конечному промежутку $[a; b]$; 2) все возможные значения одинаково вероятны.

О таких СВ говорят, что они распределены по закону равномерной плотности.

Например, шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. Ошибка при округлении до ближайшего целого деления – СВ, распределенная с равномерной плотностью на промежутке [0; 0,5].

☑ *Определение.* Распределение непрерывной СВ ξ называется ***равномерным***, если ее плотность вероятности $p(x)$ постоянна на промежутке $[a; b]$.

Непосредственно из определения следует, что функция плотности распределения вероятностей для этого закона имеет вид

$$p(x)=\begin{cases} c, & \text{если } x\in[a;b],\ c=\text{const},\\ 0, & \text{если } x\notin[a;b]. \end{cases}$$

Параметр c найдем из условия нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{a}^{b} cdx=c(b-a)=1 \quad \Rightarrow c=\frac{1}{b-a}.$$

Окончательно функция плотности вероятности $p(x)$ равномерного закона распределения будет

$$p(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a<x\le b,\\ 0, & \text{если } x>b. \end{cases}$$

График функции $p(x)$ изображен на рис. 5.13.

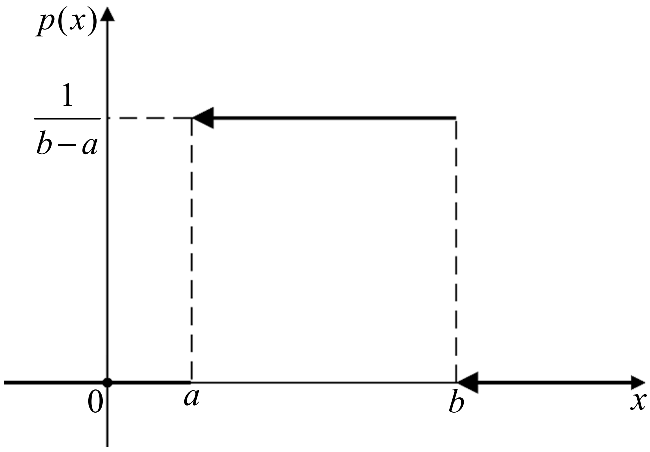


Рис. 5.13. График плотности вероятности равномерного закона распределения

Функция распределения равномерного закона распределения будет

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a<x\le b,\\ 1, & \text{если } x>b. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ равномерного закона распределения продемонстрирован на рис. 5.14.

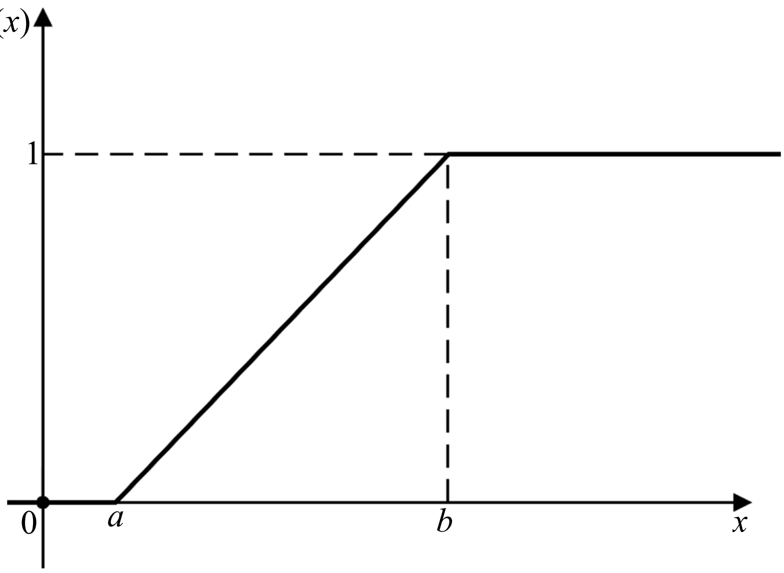


Рис. 5.14. График функции распределения равномерного закона распределения

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_{-\infty}^{a} 0\cdot dx+\int_{a}^{b}\frac{xdx}{b-a}+\int_{b}^{+\infty} 0\cdot dx=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2},$$

$$D(\xi)=\frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma(\xi)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$, лежащий внутри отрезка $[a, b]$, зависит только от длины этого интервала и не зависит от его положения

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \tag{5.35}$$

ПРИМЕР 28. Интервал прибытия между поездами метрополитена распределен по равномерному закону на временном отрезке [0; 5]. Найти вероятность того, что подошедшему к перрону пассажиру придется ждать от одной до трех минут.

Решение. СВ ξ – время прибытия, подчинена равномерному закону распределения. Непосредственно из условия задачи имеем, что $a=0,\ b=5,\ \alpha=1,\ \beta=3$ и по формуле (5.35) получаем

$$P(0\le\xi<3)=\frac{3-1}{5-0}=0,4.$$

Показательный (экспоненциальный) закон распределения Непрерывная СВ называется ***распределенной по показательному закону*** с параметром λ, если ее плотность вероятности имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x\geq 0, \quad \lambda>0.\end{cases}$$

График плотности вероятности $p(x)$ изображен на рис. 5.15, *б*.

Интегральная функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x\geq 0.\end{cases}$$

График интегральной функции распределения $F(x)$ изображен на рис. 5.15, *а*.

Числовые характеристики:

$$M(\xi)=\frac{1}{\lambda},\ D(\xi)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(\xi)=\frac{1}{\lambda}.$$

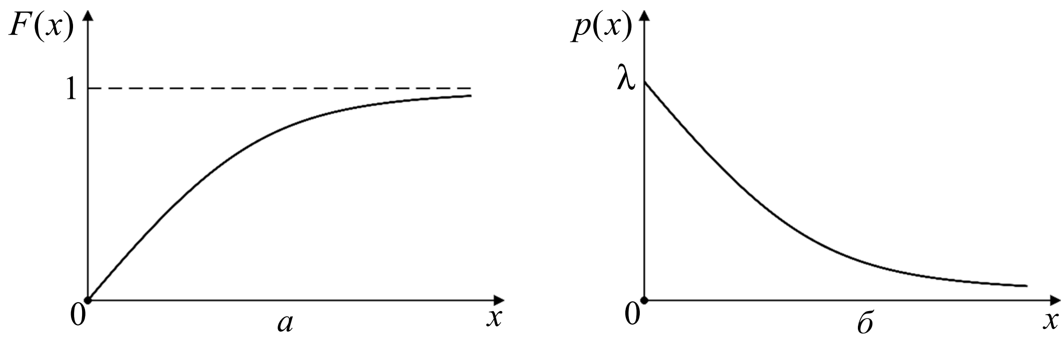


Рис. 5.15. Графики:
а – интегральной функции; *б* – плотности вероятности, показательного закон распределения

Вероятность попадания в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ будет

$$P(\alpha<\xi<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}, \quad \alpha>0,\beta>0. \tag{5.36}$$

Показательный закон находит применение в теории массового обслуживания. По нему распределено время ремонта, простоя в очереди, обслуживания и т. д.

☒ *ПРИМЕР 29.* Время обслуживания покупателя распределено по показательному закону. Среднее время обслуживания составляет

15 мин. Чему равна вероятность того, что он простоит в очереди от 20 до 30 мин.

Решение. Среднее время обслуживания – это математическое ожидание. Следовательно, параметр λ показательного закона равен обратной величине: $\lambda = \dfrac{1}{M(\xi)} = \dfrac{1}{15}$. Поэтому искомая вероятность по формуле (5.36) будет

$$P(10 \le \xi < 30) = e^{-\frac{1}{15}\cdot 20} - e^{-\frac{1}{15}\cdot 30} = e^{-\frac{4}{3}} - e^{-2} \approx 0,667.$$

☒ *ПРИМЕР 30.* Случайная величина ξ – время работы прибора распределена по показательному закону. Среднее время работы прибора 400 ч. Найти вероятность того, что прибор проработает не менее 600 ч.

Решение. По условию $M(\xi) = 400$. Для показательного закона распределения $M(\xi) = \dfrac{1}{\lambda}$. Следовательно, $\lambda = \dfrac{1}{400}$. Искомую вероятность $P(\xi \ge 600)$ будем искать, используя вероятность противоположного события и формулу (5.35):

$$P(\xi \ge 600) = 1 - P(0 \le \xi < 600) = 1 - (e^{-\frac{0}{400}} - e^{-\frac{600}{400}}) = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,22.$$

Нормальный закон распределения (закон Гаусса). ***Нормальное распределение*** – это особый тип распределения, при котором большинство его значений сосредоточено около среднего значениния. Нормальный закон распределения (часто называемый законом Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди законов распределения особое положение. Он наиболее часто встречается на практике. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов, состот в том, что он является *предельным* законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Доказано, что сумма достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) СВ, подчиненных каким угодно законам распредления (при соблюдении некоторых весьма нежестких ограничений), приближенно подчиняется нормальному закону, и это выполняется тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется.

Распределение называется ***нормальным*** (***или распределением Гаусса***) с параметрами a и $\sigma > 0$, если плотность распределения вероятности имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Можно показать, что параметры a и σ имеют определенный вероятностный смысл: $a = M(\xi)$; $\sigma^2(\xi) = D(\xi)$.

График функции плотности вероятности нормального распределения изображен на рис. 5.16 и называется кривой Гаусса или ***нормальной кривой.***

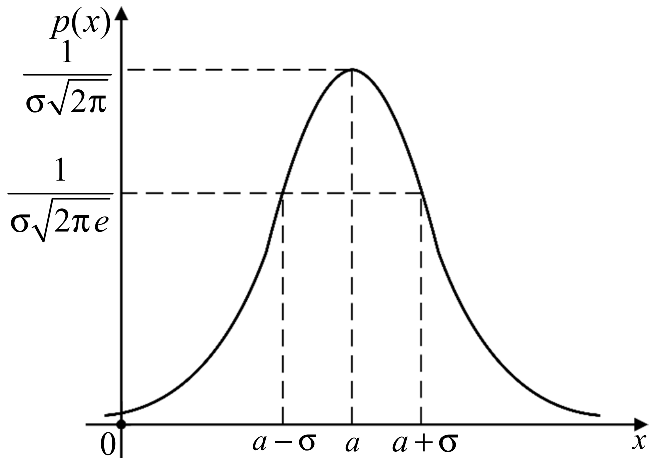


Рис. 5.16. Кривая Гаусса

График нормального распределения симметричен относительно прямой $x = a$, имеет точки перегиба с абсциссами $a - \sigma$, $a + \sigma$. При $x = a$ функция $p(x)$ принимает максимальное значение

$$p_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Нормальный закон распределения с произвольными a и σ (обозначается $N(a;\sigma)$) называется ***общим нормальным законом распределения***. Однако на практике для вычисления вероятностей пользуются нормированным (стандартным) законом распределения $N(0;1)$ с параметрами: $a = 0, \sigma = 1$. Любая СВ вида $\xi \in N(a;\sigma)$ легко сводится к СВ $N(0;1)$ заменой $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$.

Одной из основных задач теории вероятностей является определение вероятности попадания СВ ξ на заданный интервал $(\alpha; \beta): P(\alpha < \xi < \beta)$. Для решения этой задачи в случае нормально распределенной случайной величины используют функцию $\Phi(x)$ действительной переменной x

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

которая называется ***функцией Лапласа.*** Отметим, что приведенный интеграл является неберущимся интегралом.

Свойства функции Лапласа

1. $\Phi(0) = 0$;
2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, т. е. нечетная функция;
3. $\Phi(-\infty) = -\frac{1}{2}$, $\Phi(+\infty) = \frac{1}{2}$;
4. $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ для всех конечных значений x, следовательно, функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает на всей числовой оси.

График функции Лапласа изображен на рис. 5.17.

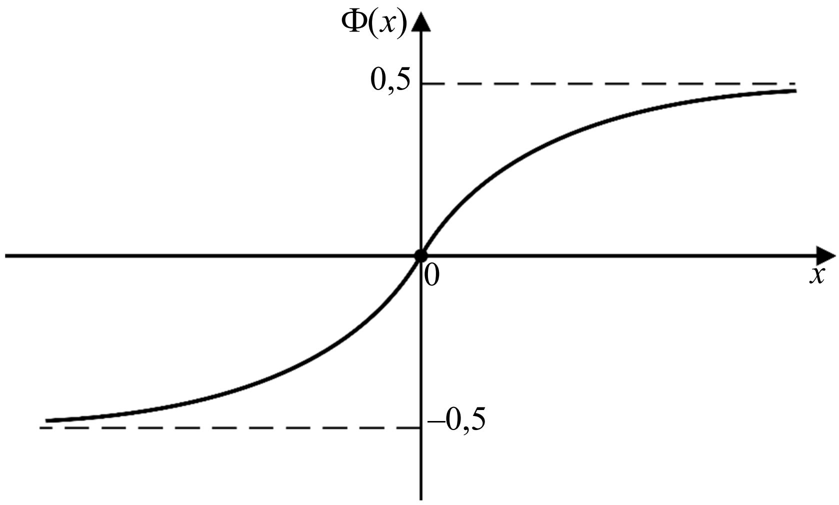


Рис. 5.17. График функции Лапласа

Для функции Лапласа составлены таблицы значений (прил. 2). Но поскольку она быстро стремится к своим асимптотам и нечетная, то таблицы составлены только для $x \in [0; 5]$. Для $x \geq 5$ $\Phi(x) \approx 0,5$.

Интегральная функция распределения общего нормального закона распределения выражается через функцию Лапласа следующим образом:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\left|\frac{t-a}{\sigma}=u\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}}du+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность попадания СВ ξ на заданный интервал $(\alpha;\beta)$ будет

$$P(\alpha\le\xi<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (5.37)$$

Замечание. В некоторых учебниках таблицы значений записаны для удвоенной функции Лапласа. В этом случае вероятность, вычисленная по формуле (5.37), делится на 2.

Вероятность того, что случайная величина ξ, распределенная нормально с параметрами a и σ, отклонится от своего математического ожидания менее чем на δ, определяется соотношением

$$P(|\xi-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (5.38)$$

Полагая $\delta=\sigma$, получаем

$$P(|\xi-a|<\sigma)=2\Phi(1)=0{,}6816.$$

При $\delta=2\sigma$ получаем

$$P(|\xi-a|<2\sigma)=2\Phi(2)=0{,}9544.$$

При $\delta=3\sigma$ получаем

$$P(|\xi-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973\approx 1.$$

Отсюда следует, что с вычисленными вероятностями можно утверждать, что для нормального закона распределения 68,2% его значений находится в пределах отклонения от математического ожидания одного σ, 95,4% – в пределах 2σ, и 99,7% – в пределах 3σ.

Правило «трех сигм» для нормального закона распределения. Если случайная величина распределена нормально с параметрами a и σ, то попадание ее в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ является практически достоверным событием и, стало быть, вероятность противоположного события ничтожно мала и на практике таким событием пренебрегают.

☒ *ПРИМЕР 31.* Случайная величина ξ распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10.

Найти:

а) вероятность попадания случайной величины в интервал (20; 50);

б) вероятность $P(|\xi - M(\xi)| < \sigma)$.

Решение. а) По условию $\alpha = 20; \beta = 50; a = 30; \sigma = 10.$ По формуле (5.37) и с учетом прил. 2 получаем

$$P(20 < \xi < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{20-30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) =$$
$$= \Phi(2) + \Phi(1) = 0,4772 + 0,3413 = 0,8185.$$

б) По формуле (5.37) получаем

$$P(|\xi - M(\xi)| < \sigma) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826.$$

☒ *ПРИМЕР 32.* Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратичным отклонением 0,2 ден. ед.

Найти:

а) вероятность того, что цена акции не выше 15,3 ден. ед; б) с помощью правила «трех сигм определить границы, в которых находится цена акции.

Решение. Пусть ξ – текущая цена акции. По условию ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = M(\xi) = 15$ и $\sigma = 0,2.$

а) Находим вероятность

$$P(\xi \le 15,3) = P(\infty < \xi < 15,3) = \Phi\left(\frac{15,3-15}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty}{0,2}\right) =$$
$$= \Phi(1,5) - \Phi(-\infty) = 0,433 - (-0,5) = 0,9332.$$

б) По правилу «трех сигм» случайная величина ξ, распределенная нормально с параметрами a и σ, с вероятностью 0,9973 попадает в интервал $(a-3\sigma; a+3\sigma)$. Следовательно, практически достоверно, что цена акции будет находиться в пределах от $15-3\cdot 0,2=14,4$ ден. ед. до $15+3\cdot 0,2=15,6$ ден. ед.

5.12. Системы двух случайных величин

До сих пор мы рассматривали СВ, возможные значения которых определялись одним числом. Такие величины называют одномерными. Однако во многих случаях результаты опытов определяются не одной СВ, а двумя или большим количеством СВ $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, связанных между собой. Множество СВ, рассматриваемых совместно, называют ***системой n*** СВ (или ***n-мерной*** СВ и обозначают $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Например, контролируемые размеры стальных плит, которые штампует станок, определяются тремя числами (x, y, z), где x – длина; y – ширина; z – высота.

Если СВ, составляющие систему СВ, дискретны, то получаем ***дискретную систему* СВ**, если непрерывны – то ***непрерывную систему* СВ**, если имеются как непрерывные, так и дискретные, – ***смешанную систему* СВ.**

Не ограничивая общности, мы остановимся на двумерных СВ. Обычно двумерные СВ обозначают (X, Y) или (ξ, η).

Законом распределения двумерной ***СВ*** (ξ, η) называется всякое соотношение, устанавливающее взаимосвязь между возможными значениями (x, y) системы случайных величин (ξ, η) и вероятностями их наступления $p_{xy} = P(\xi = x, \eta = y)$.

Каждую из составляющих X и Y или ξ и η можно рассматривать как одномерную случайную величину.

Рассмотрим дискретную систему двух СВ (ξ, η) с возможными значениями (x_i, y_j), $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Через p_{ij} обозначим вероятность того, что в результате опыта СВ ξ примет значение x_i: $(\xi = x_i)$ и одновременно СВ η примет значение y_j: $(\eta = y_j)$

$$p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

Одним из видов закона распределения является ***таблица распределения дискретной системы*** СВ (ξ,η) (табл. 5.11).

В верхней горизонтальной строке таблицы записаны возможные значения СВ ξ системы, а в первом левом столбце – СВ η. На пересечении столбцов и строк отложены вероятности наступления соответствующих событий.

Таблица 5.11

Закон распределения дискретной двумерной СВ (ξ,η)

η	ξ				
	x_1	x_2	…	x_n	$P(\eta=y_j)$
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{n1}	$q_1=\sum_{i=1}^{n} p_{i1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{n2}	$q_2=\sum_{i=1}^{n} p_{i2}$
…	…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{nm}	$q_m=\sum_{i=1}^{n} p_{im}$
$P(\xi=x_i)$	$p_1=\sum_{j=1}^{m} p_{1j}$	$p_2=\sum_{j=1}^{m} p_{2j}$	…	$p_n=\sum_{j=1}^{m} p_{nj}$	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$

События вида $(\xi=x_i,\eta=y_j)$ образуют полную группу несовместных событий, поэтому их сумма есть событие достоверное и, следовательно, сумма всех элементов таблицы равна единице

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=1. \tag{5.39}$$

Формула (5.39) называется ***условием нормировки*** (корректности задания совместного закона распределения) для ***системы двух дискретных* СВ.**

В табл. 5.11 первый и последний столбцы дают ряд распределения составляющей СВ η, а первая и последняя строки – ряд распределения составляющей СВ ξ.

Для непрерывной системы случайных величин построить таблицу распределения не представляется возможным.

Непрерывную систему СВ (ξ,η) задают с помощью функции распределения $F(x,y)$ или функции $p(x,y)$ – плотности распределения вероятностей. Для непрерывной СВ функция распределения $F(x,y)$ непрерывная и дважды дифференцируемая.

☑ *Определение.* ***Функцией распределения двумерной*** **СВ** (ξ,η) называется функция, задаваемая равенством

$$F(x,y)=P(\xi<x,\eta<y). \tag{5.40}$$

Она задает вероятность того, что составляющая ξ примет значение, меньшее x, а составляющая η – меньшее чем y. Геометрически функция распределения выражает вероятность попадания случайной точки в полубесконечый квадрат с вершиной в точке с координатами (x, y) (рис. 5.18).

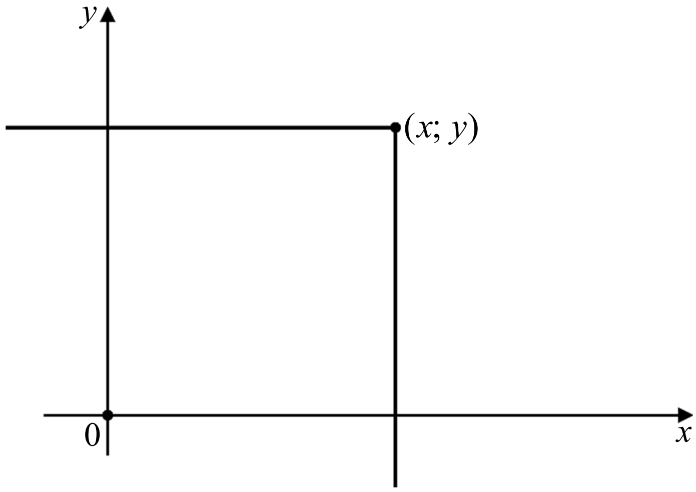


Рис. 5.18. Полубесконечый квадрат для функции распределения двумерной СВ (ξ,η)

Свойства $F(x,y)$

1. $0\le F(x,y)\le 1$.

2. $F(x,y)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов:

$$\begin{cases} F(x_1,y)\le F(x_2,y), & x_1<x_2, y\in R, \\ F(x,y_1)\le F(x,y_2), & y_1<y_2, x\in R. \end{cases}$$

3. Пусть $F_1(x)$ – интегральная функция распределения составляющей ξ; $F_2(x)$ – интегральная функция распределения составляющей η. Тогда

$$\begin{cases} F(-\infty,y)=0, & F(+\infty,y)=F_2(y), \\ F(x,-\infty)=0, & F(x,+\infty)=F_1(x), \\ F(-\infty,-\infty)=0, & F(+\infty,+\infty)=1. \end{cases}$$

С помощью функции распределения можно вычислить вероятности попадания случайной точки в некоторые области:

– в вертикальную полуполосу $L_1 = \{(\xi,\eta) \mid x_1 \le \xi < x_2, \eta < y\}$ (рис. 5.19, *а*)

$$P\big((\xi,\eta)\in L_1\big) = F(x_2,y) - F(x_1,y);$$

– в горизонтальную полуполосу $L_2 = \{(\xi,\eta) \mid \xi < x, y_1 \le \eta < y_2\}$ (рис. 5.19, *б*)

$$P\big((\xi,\eta)\in L_2\big) = F(x,y_2) - F(x,y_1);$$

– в прямоугольник $D = \{(\xi,\eta) \mid x_1 \le \xi < x_2, y_1 \le \eta < y_2\}$ (рис. 5.19, *в*)

$$P\big((\xi,\eta)\in D\big) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1).$$

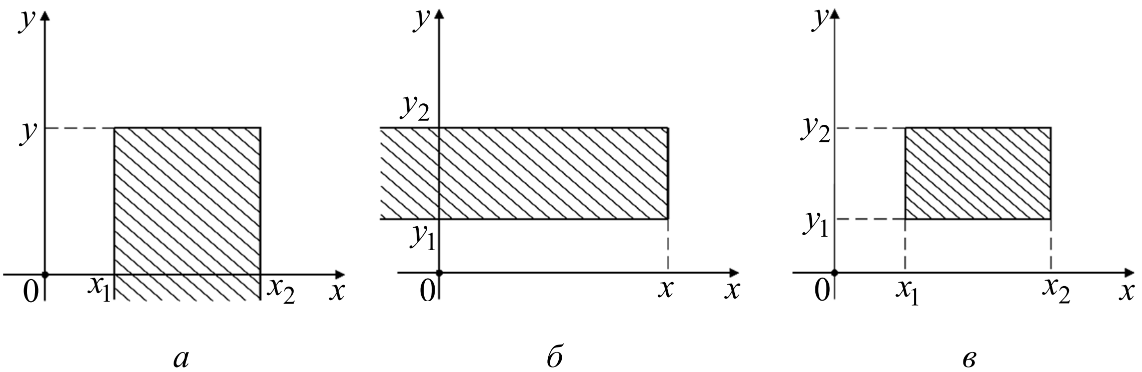


Рис. 5.19. Области:
а – вертикальная полуполоса; *б* – горизонтальная полуполоса;
в – прямоугольник

ПРИМЕР 33. Дана интегральная функция распределения

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 3x + \frac{1}{2}\right).$$

Найти вероятность попадания в прямоугольник: $x = \frac{1}{2}$; $x = 0$; $y = \frac{1}{3}$; $y = 0$.

Решение.

$$P\left(0 < \xi < \frac{1}{2}, 0 < \zeta < \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) - F\left(\frac{1}{2},0\right) - F\left(0,\frac{1}{3}\right) + F(0,0) =$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}0+\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}0+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}0+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}0+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}.$$

☑ *Определение.* ***Функцией плотности распределения вероятностей*** (***дифференциальной функцией распределения***) $p(x,y)$ двумерной непрерывной СВ (ξ,η) называют вторую смешанную частную производную от ее интегральной функции:

$$p(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \tag{5.41}$$

Функция распределения $F(x,y)$ существует как для непрерывной, так и для дискретной двумерной СВ. Функция плотности распределения вероятностей $p(x,y)$ существует только для *непрерывных двумерных* СВ, у которых $F(x,y)$ дважды дифференцируема.

Вероятностный смысл функции плотности распределения вероятностей состоит в том, что она характеризует предел отношения вероятности, приходящейся на единицу площади, к этой площади. Другими словами, это плотность вероятности.

Основные свойства функция плотности вероятности

1. Функция плотности распределения вероятностей неотрицательная функция $p(x, y) \geq 0$.

2. Вероятность попадания случайной точки в плоскую область D равна двойному интегралу по этой области от плотности вероятностей:

$$P\big((\xi,\eta)\in D\big)=\iint\limits_D p(x,y)\,dx\,dy.$$

3. *Условие нормировки* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,dy=1.$ (5.42)

4. $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} p(t,s)\,dt\,ds.$

5. Функции плотности распределения вероятностей составляющих системы СВ находятся по следующим формулам:

$$p_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy;\quad p_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx.$$

6. Функции распределения составляющих системы СВ находятся по следующим формулам:

$$F_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t,s)\,dt\,ds;\; F_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t,s)\,ds\,dt.$$

ПРИМЕР 34. Дана плотность распределения вероятностей

$$p(x,y)=\frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти:

1) параметр a;

2) $F(x,y)$;

3) $P((\xi,\eta)\in D)$, где $D=\{x=0;\ y=0;\ x=1;\ y=1\}$.

Решение.

1) Из условия нормировки (5.42) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy=a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy=$$

$$=a\cdot\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}\cdot\operatorname{arctg}y\Big|_{-\infty}^{+\infty}=a\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=a\pi^2=1.$$

Следовательно, $a=\dfrac{1}{\pi^2}$.

2) $$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{1}{(1+t^2)(1+s^2)}dt\,ds=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}t\Big|_{-\infty}^{x}\cdot\operatorname{arctg}s\Big|_{-\infty}^{y}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}y+\frac{\pi}{2}\right).$$

3) $$P((\xi,\eta)\in D)=F(1;1)-F(1;0)-F(0;1)+F(0;0)=\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}1+\frac{\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}1+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}1+\frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}0+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}0+\frac{\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}1+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}0+\frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}0+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4}=\frac{1}{16}.$$

Условные законы распределения составляющих двумерной СВ. Зависимые и независимые СВ.

Если события A и B зависимы, то условная вероятность $P(A/B)$ отличается от безусловной $P(A)$. В этом случае $P(A/B)$ $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$. Аналогичное положение имеется и для двумерных СВ. Чтобы охарактеризовать зависимость между составляющими ξ и η вводят так называемые условные законы распределения.

☑ *Определение.* ***Условным законом распределения*** называется закон распределения одной из СВ, входящей в систему, найденный при условии, что другая СВ системы приняла вполне определенное значение.

Рассмотрим дискретную двумерную СВ (ξ,η). Пусть возможные значения составляющих будут

$$x_1, x_2, \dots, x_n;\ y_1, y_2, \dots, y_m.$$

Условный закон распределения дискретной случайной величины ξ при условии, что дискретная случайная величина η принимает конкретное значение y_j (j – зафиксированное значение от 1 до m) определяется табл. 5.12.

Таблица 5.12

Условный закон распределения

ξ	x_1	x_2	…	x_n
$P(x_i/y_j)$	$P(x_1/y_j)$	$P(x_2/y_j)$	…	$P(x_m/y_j)$

Здесь $P(x_i/y_j)$ – условные вероятности, вычисленные в предположении, что событие $\eta=y_j$ наступило:

$$P(x_i/y_j)=\frac{P(\xi=x_i,\eta=y_j)}{P(\eta=y_j)}=\frac{p_{ij}}{q_j},\ i=\overline{1,k}. \quad (5.43)$$

Аналогично вводится условное распределение для составляющей η.

Рассмотрим непрерывную двумерную СВ (ξ,η).

☑*Определение.* ***Условной функцией плотности распределения вероятностей составляющей*** ξ ***при*** $\eta = y$ называется функция

$$\varphi_1(x/y) = \frac{p(x,y)}{p_2(y)},$$

где $p_2(y)$ – функция плотности вероятности составляющей η.

Аналогично, у***словной функцией плотности распределения вероятностей составляющей*** η ***при*** $\xi = x$ называется функция

$$\varphi_2(y/x) = \frac{p(x,y)}{p_1(x)},$$

где $p_1(x)$ – функция плотности распределения вероятности составляющей ξ.

☑*Определение.* Случайная величина η называется независимой от случайной величины ξ, если ее закон распределения не зависит от того, какое значение приняла величина ξ. В противном случае она называется зависимой.

Теорема. Для того чтобы случайные величины ξ и η были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы СВ (ξ,η) была равна произведению функций распределения составляющих системы:

$$F(x,y) = F_1(x)\cdot F_2(y).$$

Следствие. Для того чтобы непрерывные СВ ξ и η были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция плотности распределения вероятностей СВ (ξ,η) была равна произведению функций плотности распределения составляющих системы:

$$p(x,y) = p_1(x)\cdot p_2(y).$$

⌧ *ПРИМЕР 35.* Двумерная СВ задана таблицей.

η	ξ		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Проверить, являются ли независимыми СВ ξ и η.

Решение. Найдем условные законы распределения составляющей ξ при условии, что составляющая η приняла значение y_1 и y_2.

Найдем условные вероятности:

$$P(x_1 / y_1),\ P(x_1 / y_1),\ P(x_3 / y_1),\ P(x_1 / y_2),\ P(x_2 / y_2),\ P(x_3 / y_2).$$

Воспользовавшись формулой (5.43) и приняв во внимание, что

$$q_1 = p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0{,}10 + 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}60;$$

$$q_2 = p_{12} + p_{22} + p_{32} = 0{,}06 + 0{,}18 + 0{,}16 = 0{,}40,$$

получим

$$P(x_1 / y_1) = \frac{p_{11}}{q_1} = \frac{0{,}10}{0{,}60} = \frac{1}{6}; \qquad P(x_1 / y_2) = \frac{p_{12}}{q_2} = \frac{0{,}06}{0{,}40} = 0{,}15;$$

$$P(x_2 / y_1) = \frac{p_{21}}{q_1} = \frac{0{,}30}{0{,}60} = \frac{1}{2}; \qquad P(x_2 / y_2) = \frac{p_{22}}{q_2} = \frac{0{,}18}{0{,}40} = 0{,}45;$$

$$P(x_3 / y_1) = \frac{p_{31}}{q_1} = \frac{0{,}20}{0{,}60} = \frac{1}{3}; \qquad P(x_3 / y_2) = \frac{p_{32}}{q_1} = \frac{0{,}16}{0{,}40} = 0{,}4.$$

Сложив для контроля найденные условные вероятности, убедимся, что их сумма равна единице, как и должно быть:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1; \quad 0{,}15 + 0{,}45 + 0{,}4 = 1.$$

Искомый условный закон распределения составляющей ξ при условии, что составляющая η приняла значение y_1, запишем в виде таблицы.

ξ	x_1	x_2	x_3
$P(x_i / y_1)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Условный закон распределения составляющей ξ при условии, что составляющая η приняла значение y_2, запишем в виде таблицы.

ξ	x_1	x_2	x_3
$P(x_i / y_2)$	0,15	0,45	0,4

Так как эти законы не совпадают, т. е. вероятности $P(x_i / y_j)$ СВ ξ зависят от того, какое значение приняла СВ η, то СВ ξ и η являются зависимыми СВ.

Числовые характеристики системы двух случайных величин. Если известны законы распределения системы случайных величин (ξ,η) (для дискретной системы – таблица распределения, для непрерывной – плотность вероятностей), то для СВ, входящих в систему, можно вычислить математические ожидания:

$$M(\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}x_i p_{ij} & \text{– для дискретной СВ } (\xi,\eta),\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)\,dx\,dy & \text{– для непрерывной СВ } (\xi,\eta).\end{cases}$$

$$M(\eta)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}y_i p_{ij} & \text{– для дискретной СВ } (\xi,\eta),\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yp(x,y)\,dx\,dy & \text{– для непрерывной СВ } (\xi,\eta).\end{cases}$$

Также можно вычислить их дисперсии:

$$D(\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}x_i^2 p_{ij} - M^2(\xi) & \text{– для дискретной СВ } (\xi,\eta),\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x,y)\,dx\,dy-M^2(\xi) & \text{– для непрерывной СВ } (\xi,\eta).\end{cases}$$

$$D(\eta)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\text{j}=1}^{m}y_i^2 p_{ij} - M^2(\eta) & \text{– для дискретной СВ } (\xi,\eta),\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2p(x,y)\,dx\,dy-M^2(\eta) & \text{– для непрерывной СВ } (\xi,\eta).\end{cases}$$

Математические ожидания $M(\xi)$ и $M(\eta)$ определяют на плоскости точку с координатами $(M(\xi);M(\eta))$ – ***центр распределения*** (или разброса) значений ***системы***. Дисперсии $D(\xi)$ и $D(\eta)$ характеризуют степень разброса возможных значений системы около центра распределения в направлении осей Ox и Oy соответственно.

Для описания системы двух случайных величин, кроме математических ожиданий и дисперсий составляющих, пользуются и другими характеристиками, к числу которых относятся корреляционный момент – $k_{\xi\eta}$ и коэффициент корреляции – $r_{\xi\eta}$.

Корреляционным моментом (моментом связи, смешанным центральным моментом второго порядка) $k_{\xi\eta}$ ***случайных величин*** ξ ***и*** η называется математическое ожидание произведения центрированных значений этих случайных величин:

$$k_{\xi\eta} = M\left((\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))\right) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta).$$

Корреляционный момент служит для характеристики связи между случайными величинами ξ и η. Справедлива теорема.

Теорема. Корреляционный момент двух независимых случайных величин ξ и η равен нулю.

Корреляционный момент вычисляется по следующим формулам:

$$k_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i - M(\xi)\right)\left(y_j - M(\eta)\right)p_{ij} \text{ – для системы дискретных СВ } (\xi,\eta)$$

и

$$k_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - M(\xi)\right)\left(y - M(\eta)\right)p(x,y)\,dx\,dy, \text{ если система двух СВ } (\xi,\eta)$$

непрерывная.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин ξ и η, и неудобен для сравнения корреляционных моментов различных систем случайных величин. Поэтому вводят в рассмотрение безразмерную величину коэффициент корреляции – $r_{\xi\eta}$ по формуле

$$r_{\xi\eta} = \frac{k_{\xi\eta}}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}.$$

Коэффициент корреляции характеризует тесноту линейной зависимости между случайными величинами ξ и η, $\left|r_{\xi\eta}\right| \le 1$.

Если случайные величины независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю. Равенство нулю коэффициента корреляции является только необходимым, но не достаточным условием их независимости. Могут существовать системы зависимых случайных величин, коэффициент корреляции которых равен нулю.

Более подробно коэффициент корреляции будет рассмотрен в главе «Математическая статистика».

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1. Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт – подбрасывание симметричной монеты; события: A – выпадение «герба», B – выпадение «решки»;

б) опыт – производится два выстрела по мишени; события: A – хотя бы одно попадание, B – хотя бы один промах.

2. Являются ли равновозможными следующие события:

а) события: A – выпадение «герба», B – выпадение «решки» при подбрасывании симметричной монеты.

б) A – выпадение «герба», B – выпадение «решки» при подбрасывании гнутой монеты.

3. Составьте пространство элементарных событий Ω, соответствующее эксперименту: произведено два выстрела по цели.

4. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются четырехзначные числа. Найти:

а) сколько всевозможных четырехзначных чисел

б) сколько среди них таких, которые состоят из различных цифр

5. Сколькими способами можно переставить восемь книг на полке?

6. Сколькими способами можно смоделировать трехцветный флаг, состоящий из равных горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов?

7. Экзаменационный билет состоит из трех вопросов. Сколько различных билетов можно составить из 20 вопросов? (Порядок вопросов в билете не учитывается).

8. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и одного вратаря, если всего в команде шесть нападающих, три полузащитника, шесть защитников и один вратарь.

9. Сколько существует способов выбрать двух парней и трех девушек из группы, в которой шесть парней и пять девушек?

10. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

11. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

12. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке пять человек?

Используя классическое определение вероятности и раздел «Комбинаторика», решить задачи.

13. Найти вероятность того, что задуманное двухзначное число кратно пяти.

14. В урне находится пять белых, десять черных и пятнадцать красных шаров. Случайным образом извлекается один шар. Найти вероятность:

а) извлечен белый шар;

б) извлечен не красный шар.

15. В группе двенадцать студентов, из них семь отличников. Наудачу выбрали пять человек. Найти вероятность того, что среди них три отличника.

16. Наугад брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков окажется равной пяти.

17. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что на верхней грани выпадет:

а) шесть очков;

б) нечетное число очков;

в) не менее трех очков.

18. Случайным образом складывают карточки с буквами Р, Т, И. Найти вероятность того, что получится:

а) слово «три»;

б) слово «два».

19. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность, что получится слово «ДВА»?

20. Брошены две игральные кости. Найти вероятность:

а) сумма выпавших очков не менее девяти;

б) по крайней мере, на одной кости выпадет два;

в) только на одной кости выпадет два.

21. Из колоды в 36 карт наугад выбирают четыре карты. Какова вероятность, что среди них окажутся два туза?

22. Из 15 мальчиков и 10 девочек составляется группа из наугад выбранных пяти человек. Какова вероятность того, что в нее попадут три мальчика и две девочки?

23. Случайным образом складывают карточки с буквами М, М, А, А. Найти вероятность того, что получится слово «МАМА».

24. В партии из десяти деталей семь стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей четыре стандартные.

25. В ящике находятся пятнадцать красных, девять голубых и шесть зеленых шаров. Наудачу вынимают шесть шаров. Какова вероятность того, что вынуты один зеленый, два голубых и три красных шара?

26. Из букв слова «РОТОР», составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекаются три буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «ТОР»?

27. На пяти одинаковых карточках написаны буквы Л, М, О, О, Т. Какова вероятность того, что, извлекая карточки по одной наугад в порядке их выхода, получим слово «МОЛОТ»?

28. На пяти карточках написаны буквы И, К, М, Н, С. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «МИНСК»?

29. На пяти карточках написаны буквы И, К, М, Н, С. Случайным образом извлекается одна карточка и записывается буква, написанная на ней. После чего карточка возвращается обратно. Карточки перемешиваются и снова извлекается одна карточка и записывается буква. Так процедура повторяется пять раз. Какова вероятность того, что получится слово «МИНСК»?

30. На шести одинаковых по форме и размеру карточках написаны буквы слова «ТАЛАНТ» – по одной букве на каждой карточке. Карточки тщательно перемешаны. Их вынимают наудачу и располагают на столе одна за другой. Какова вероятность снова получить слово «ТАЛАНТ»?

Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, решить задачи.

31. Бросаются четыре игральные кости. Найти вероятность того, что на всех выпадет одинаковое число очков.

32. Студент знает 25 вопросов из 30. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Для сдачи экзамена нужно ответить не менее чем на два вопроса. Студент случайным образом тянет билет. Найти вероятность того, что он сдаст экзамен.

33. Студент пришел сдавать зачет. Из 30 вопросов он знает 20. Преподаватель задает по одному вопросу. Как только студент ответит на вопрос, он получает зачет. Найти вероятность того, что будет задано:

а) один вопрос;

б) три вопроса;

в) более трех вопросов.

34. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,8; третий – 0,7. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) ровно два экзамена; б) все три экзамена; в) хотя бы один экзамен.

35. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания рабочего первый станок – 0,9; второй – 0,8; третий – 0,9. Найти вероятность того, что в течение часа только один станок потребует внимания рабочего.

36. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу по цели. Найдите вероятность того, что в цель будет не менее двух попаданий.

37. Имеются две урны. В первой урне находятся пять белых, одиннадцать черных и восемь красных шаров, а во второй – соответственно десять, восемь и шесть. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Найдите вероятности событий: A – {оба шара одного цвета}; B – {оба шара белые}; C – {хотя бы один шар белый}.

38. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем ящиках соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что деталь находится:

а) только в одном ящике;

б) деталь содержится хотя бы в двух ящиках.

39. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятность попадания в которую равна: для первого стрелка – 0,6; для второго – 0,7; для третьего – 0,8. Найти вероятности:

а) одного попадания в цель;

б) не мене двух попаданий в цель;

в) все три стрелка промахнутся.

40. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочниках соответственно равны 0,4; 0,5; 0,6. Найти вероятности того, что формула содержится:

а) только в одном справочнике;

б) не менее чем в двух справочниках;

в) во всех трех справочниках;

г) формула не содержится ни в одном справочнике.

41. Стрелок имеет четыре патрона и стреляет по мишени одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что будет сделано:

а) не более трех выстрелов;

б) израсходует все патроны.

42. Устройство, состоящее из трех независимо работающих элементов, включается на время t. Вероятность отказа каждого из элементов за это время равна 0,2. Рассмотрим события: A – за время t откажут три элемента; B – за время t откажут не более двух элементов; C – за время t откажет хотя бы один элемент. Найдите вероятности событий A, B, C. Являются ли события A и B несовместными?

43. Из урны, содержащей шесть белых и четыре черных шара, наудачу и последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Извлечение производится без возвращения шаров обратно в урну. Найти вероятности того, что будет:

а) произведено три извлечения;

б) не более трех извлечений.

Используя формулу полной вероятности и формулы Байеса решить задачи.

44. С первого станка на сборку поступают 40% от всех деталей, со второго – 35%, с третьего – 25% одинаковых деталей. Среди деталей первого станка 0,2% бракованных, второго – 0,3%, третьего – 0,5%. Найдите вероятность того, что поступившая на сборку деталь без брака.

45. В урне десять шаров, из них четыре черных. Из урны последовательно по одному забрали два шара. Найдите вероятность того, что первый извлеченный после этого шар – черный.

46. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, а для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей со станка № 1 складывается вдвое больше, чем со станка № 2. Вычислите вероятность того, что взятая наудачу деталь не будет бракованной.

47. На наблюдательной станции установлено четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора равна 0,8; второго – 0,9; третьего – 0,93; четвертого – 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели?

48. Два станка производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали для первого станка 0,001, для второго – 0,005. Производительность второго станка втрое больше, чем первого. Найдите вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь стандартная.

49. Имеются две урны: в первой – два белых шара и три черных; во второй – четыре белых и пять черных. Из первой урны случайным образом берут один шар и перекладывают во вторую. После этого из второй урны берут один шар. Найдите вероятность того, что этот шар будет белым.

50. Имеются две партии одинаковых изделий по 15 и 20 штук. В первой партии два, а во второй – три бракованных изделия. Наудачу взятые два изделия из первой партии переложены во вторую, после чего выбирается наудачу одно изделие из второй партии. Найдите вероятность того, что выбранное изделие является бракованным.

51. Из автопарка в случайном порядке по одной выезжают автомашины: четыре ситроена, шесть шкод и десять рено. Найдите вероятность того, что второй выедет шкода.

52. В группе спортсменов двадцать бегунов, шесть велосипедистов, четыре лыжника. Вероятность выполнения квалификационной нормы равна: для велосипедиста – 0,9; для бегуна – 0,85; для лыжника – 0,75. Найдите вероятность того, что спортсмен, вызванный наудачу, сдаст квалификационные нормы.

53. На заводе, изготовляющем болты, первый станок производит 25%, второй – 35%, третий – 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен первым, вторым, третьим станком?

54. На складе находятся одинаковые детали, изготовленные на двух заводах. Известно, что объем продукции первого завода в четыре раза превышает объем продукции второго завода. Вероятность брака на первом заводе 0,05; на втором заводе – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом?

55. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый изготовил 35% всех деталей, второй – 40%, третий – всю остальную продукцию. Брак в их продукции составляет: у первого рабочего – 2%, у второго – 3%, у третьего – 4%. Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена третьим рабочим.

Используя теоремы Муавра – Лапласа, формулы Бернулли и Пуассона, решить задачи.

56. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность, что из случайно взятых в этом месяце восьми дней три дня окажутся дождливыми?

57. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен):

а) три партии из четыре или пять из восьми;

б) две партии из четырех или три из шести?

58. Изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий:

а) нет ни одного бракованного;

б) будет два бракованных.

59. Для пряжи смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность того, что среди пяти случайно выбранных волокон окрашенных будет менее двух?

60. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью, равной 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех?

61. Вероятность рождения мальчика 0,515; девочки – 0,485. В некоторой семье 6 детей. Найти вероятность того, что среди них не более двух девочек.

62. Вероятность получения удачного результата при проведении сложного химического опыта равна 2/3. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно семи.

63. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

64. Вероятность того, что стрелок попадет хотя бы один раз в цель при трех независимых выстрелах, равна 0,992. Определить вероятность попадания в цель при одном выстреле, предполагая ее постоянной при каждом выстреле.

65. Доля плодов, пораженных болезнью, составляет 25%. Случайным образом выбирается восемь плодов. Найти вероятность того, что среди них окажется не менее двух пораженных болезнью.

66. По цели производится пять независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Для получения зачета по стрельбе требуется более трех попаданий. Найдите вероятность получения зачета.

67. Прибор состоит из четырех узлов. Вероятность безотказной работы в течение смены для каждого узла составляет 0,8. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найдите вероятность того, что за смену откажут более двух узлов.

68. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность, что при 300 испытаниях успех наступит:

а) ровно 75 раз;

б) ровно 85 раз?

69. В первые классы должно быть принято 200 детей. Найти вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

70. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных «гербом» вверх, будет от 45 до 55?

71. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых 1100 изделий выбраковано будет не больше 17?

72. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.

73. Монета подброшена 1000 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет:

а) ровно 450 раз;

б) не менее 400 и не более 550 раз;

в) более 520 раз.

74. Вероятность брака при изготовлении некоторого изделия равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 500 произведенных изделий:

а) не окажется бракованных;

б) хотя бы одно бракованное;

в) не более двух бракованных.

75. Прядильщица обслуживает 1000 независимо работающих веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что на протяжении 1 мин обрыв произойдет не менее чем на пяти веретенах.

Решите задачи с использованием случайных величин.

76. Какие из следующих таблиц могут служить законами распределения СВ?

а)

ξ	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

б)

ξ	3	4	7	10
P	0,1	0,1	0,4	0,3

в)

ξ	3	3	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,4

г)

ξ	–3	4	7	10
P	0,1	0,1	0,4	0,4

77. В урне пять белых и двадцать пять черных шаров. Вынули один шар. Случайная величина ξ – число вынутых белых шаров. Построить ряд распределения и функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ.

78. Построить ряд распределения и функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ – числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попадания в корзину при одном броске равна 0,4.

79. Бросаются три монеты. Случайная величины ξ – число выпавших «решек». Построить ряд распределения и функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ.

80. Построить ряд распределения числа успехов в двух независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность успеха равна 0,3.

81. Дан ряд распределения случайной величины ξ.

ξ	–2	–1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Требуется: а) записать функцию распределения $F(x)$; б) найти вероятность того, что величина ξ примет значение, не превосходящее по абсолютной величине единицу.

82. Из партии в двадцать пять изделий, среди которых имеются шесть бракованных, выбраны случайным образом три изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения и функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ – число бракованных изделий.

83. Задан закон распределения СВ ξ.

ξ	–3	1	2
P	0,2	0,3	a

Требуется:

а) определить, при каком значении a указанная таблица является рядом распределения некоторой СВ ξ;

б) вычислить вероятности $P(1 \le \xi < 3); P(\xi \ge -2); P(\xi = 2,5)$;

в) найти функцию распределения $F(x)$ СВ ξ и построить ее график.

84. Найти математическое ожидание $M(\xi)$ и дисперсию $D(\xi)$ случайной величины ξ – число очков, выпадающих при бросании одной игральной кости.

85. Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины ξ, заданной законом распределения.

ξ	3	5	7	9
P	0,4	0,3	0,2	0,1

86. Дан ряд распределения СВ ξ.

ξ	2	4	7	11
P	0,4	0,3	a	0,1

Требуется:

а) определить значение a;

б) вычислить $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$;

в) вычислить вероятности:
$P(\xi = 2)$; $P(\xi = 3)$; $P(M(\xi) - 3 < \xi \le 7)$; $P(|\xi - M(\xi)| < \sigma(\xi))$.

87. Составить ряд распределения СВ ξ – числа попаданий в мишень при двух независимых выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Найти числовые характеристики этой случайной величины и вероятности: $P(\xi = M(\xi))$, $P(\xi < M(\xi))$.

88. Составить ряд распределения СВ ξ – числа попаданий при двух независимых выстрелах, если вероятность попадания при первом равна 0,6; при втором – 0,5. Записать функцию распределения $F(x)$ СВ ξ и построить ее график.

89. В коробке девять карандашей, из них три красных. Составить ряд распределения СВ ξ – числа красных карандашей среди двух наудачу взятых. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

90. Охотник производит три независимых выстрела по удаляющейся цели. Вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,8 и после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти математическое ожидание числа попаданий при трех выстрелах.

91. Охотник, имеющий четыре патрона, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4 и не зависит от предыдущих выстрелов. Составить ряд распределения и найти математическое ожидание числа промахов.

92. В урне четыре красных и два черных шара. Составить закон распределения СВ ξ – число вынутых черных шаров и найти $P(\xi \geq 2)$:

а) если наудачу вынуто три шара;

б) шары извлекают случайным образом по одному до появления красного.

93. Требуется:

а) определить, при каком значении параметра a функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq 1, \\ ax - \dfrac{1}{3}, & \text{если} \quad 1 < x \leq 4, \\ 1, & \text{если} \quad x > 4 \end{cases}$$

является функцией распределения непрерывной СВ ξ;

б) найти плотность распределения вероятностей $p(x)$ СВ ξ;

в) вычислить $M(\xi), D(\xi), \sigma(\xi)$;

г) вычислить вероятности $P(0 \leq \xi < 2)$; $P(\xi \geq 2)$; $P(\xi = 1{,}5)$; $P(\xi > M(\xi))$; $P(|\xi - M(\xi)| < \sigma(\xi))$.

д) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $p(x)$.

94. Требуется:

а) определить, при каком значении параметра a функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq 0, \\ ax^3, & \text{если} \quad 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 3 \end{cases}$$

является функцией распределения непрерывной СВ ξ;

б) найти плотность распределения вероятностей $p(x)$ СВ ξ;

в) вычислить $M(\xi), D(\xi), \sigma(\xi)$;

г) вычислить вероятности $P(0<\xi\le 5); P(\xi\ge 2); P(\xi=4)$;

$P(\xi>M(\xi)); P(|\xi-M(\xi)|<\sigma(\xi))$;

д) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $p(x)$.

95. Дана функция распределения непрерывной СВ ξ:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 1,\\ x(x^2-x), & \text{если} \quad 1<x\le 3,\\ 1, & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$$

Необходимо:

а) определить значение параметра a;

б) найти плотность распределения вероятностей $p(x)$ СВ ξ;

в) вычислить $M(\xi), D(\xi), \sigma(\xi)$;

г) вычислить вероятности $P(0\le\xi<2); P(\xi>2); P(\xi=1{,}5)$;

$P(\xi>M(\xi)); P(|\xi-M(\xi)|<\sigma(\xi))$;

д) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $p(x)$.

96. Найти $P(1\le\xi<2{,}5)$, $P(\xi>0{,}5)$, если СВ ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{16}, & \text{если} \quad 0<x\le 2,\\ x-\dfrac{7}{4}, & \text{если} \quad 2<x\le \dfrac{11}{4},\\ 1, & \text{если} \quad x>\dfrac{11}{4}.\end{cases}$$

97. Требуется:

а) определить, при каком значении параметра a функция

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ a, & \text{если} \quad 0<x\le 3,\\ 0, & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$$

является плотностью распределения вероятностей непрерывной СВ ξ;

б) вычислить $M(\xi), D(\xi), \sigma(\xi)$;

в) найти функцию распределения $F(x)$ СВ ξ;

г) вычислить вероятности $P(1<\xi\le 3)$; $P(\xi\ge 0{,}5)$; $P\big(\xi\ge M(\xi)\big)$;

д) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $p(x)$.

98. На вход приемного устройства поступает сигнал со случайной амплитудой напряжения. Плотность распределения случайной величины ξ – амплитуды напряжения имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ x, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ a-x, & \text{если} \quad 1<x\le 2,\\ 0, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

Требуется:

а) определить значение параметра a;

б) вычислить $M(\xi), D(\xi), \sigma(\xi)$;

в) найти функцию распределения $F(x)$ СВ ξ;

г) вычислить вероятности:

$$P(1\le\xi<3), P(\xi\ge 0{,}5), P\big(\xi=M(\xi)\big);$$

д) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $p(x)$.

99. Найти $P(1\le\xi<2{,}5)$, $P(\xi>0{,}5)$, если СВ ξ задана плотностью распределения вероятностей

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \dfrac{3}{16}(4x-x^2), & \text{если} \quad 0<x\le 2,\\ 0, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

100. Найти $M(\xi), D(\xi), F(x)$, если СВ ξ задана плотностью распределения вероятностей

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le -2,\\ 0{,}25, & \text{если} \quad -2<x\le 0,\\ x, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ 0, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

101. СВ ξ задана плотностью распределения вероятностей

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x \le 0,\\ a\sin x, & \text{если} \quad 0<x\le\pi,\\ 0, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$$

Требуется:

а) найти коэффициент a;

б) найти вероятность попадания СВ ξ в интервал $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$;

в) функцию распределения $F(x)$ СВ ξ.

102. Игральную кость бросают 4 раза. СВ ξ – число выпадений шестерки. Определить закон распределения СВ ξ и найти ее математическое ожидание и дисперсию.

103. Клиенты банка, не связанные друг с другом, возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,8, СВ ξ– число не возращенных в срок выданных 10 кредитов. Определить закон распределения СВ ξ и найти ее математическое ожидание и дисперсию.

104. Найти числовые характеристики СВ ξ – числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если случайным образом приобретено 10 билетов, причем вероятность выиграть по каждому билету равна 0,05.

105. СВ ξ имеет биномиальное распределение с $M(\xi)=0{,}8$; $D(\xi)=0{,}64$. Найти $P(\xi\le 1)$.

106. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Определить закон распределения числа отказавших за время T элементов и числовые характеристики этой случайной величины.

107. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,001. Определить закон распределения числа бракованных деталей среди 2000 отобранных наудачу и числовые характеристики этой случайной величины. Найти $P(\xi\ge 3)$.

108. Опытным путем установлено, что доля коротких волокон хлопка сырца составляет в среднем 0,5% в каждой подопытной партии. Для СВ ξ – количество коротких волокон среди выбранных наудачу 6000 проверенных. Определить закон распределения и найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(\xi > 2)$.

109. Вероятность повреждения детали при перевозке равна 0,002. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ ξ – число поврежденных деталей в партии из 500 наудачу выбранных деталей.

110. СВ ξ – время работы конденсатора задается плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ 0{,}001e^{-0{,}001x}, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Найти $M(\xi)$ и вероятность того, что конденсатор будет работать не более среднего времени его службы.

111. СВ ξ – время безотказной работы технического устройства, подчинено экспоненциальному закону распределения и задается интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ 1 - e^{-0{,}05x}, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Найти $M(\xi)$ и вероятность того, что техническое устройство не откажет за время, не меньшее среднего срока его службы.

112. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 1000 вакцинированных детей заболеют соответственно 1, 2, 3, 4 ребенка?

113. СВ ξ распределена равномерно на отрезке [2; 8]. Найти числовые характеристики СВ ξ и $P(0 \le \xi < 6), P(6 \le \xi < 7), P(\xi \ge 5)$, $P(\xi = 8)$.

114. Все значения равномерно распределенной СВ ξ лежат на отрезке [2; 7]. Найти вероятность попадания случайной величины на отрезок [3; 5].

115. Интервал движения автобусов 15 мин. С какой вероятностью пассажир будет ожидать автобус менее 3 мин?

116. СВ ξ подчинена закону равномерного распределения на интервале [0; 2]. Написать выражения для плотности вероятности и интегральной функции распределения СВ ξ. Найти вероятность попадания СВ в интервал (0; 0,5).

117. Рост человека измеряют в сантиметрах, округляя до ближайшего целого значения. Найти вероятность того, что при определении роста ребенка допущена ошибка более 3 мм.

118. Шкала секундомера имеет цену деления 0,2 с. Какова вероятность сделать по этому секундомеру отсчет времени с ошибкой более 0,05 с, если отсчет производится с округлением до ближайшего деления шкалы?

119. СВ ξ подчинена нормальному закону распределения с $M(\xi)=5$ и $D(\xi)=9$. Найти $P(4\le\xi<6)$, $P(6\le\xi<10)$, $P(\xi\ge3)$, $P(\xi=3)$.

120. СВ ξ подчинена нормальному закону распределения с $M(\xi)=3$ и $D(\xi)=25$. Найти $P(0\le\xi<6)$, $P(6\le\xi<7)$, $P(\xi\ge2)$, $P(\xi=2)$.

121. Найти числовые характеристики СВ ξ и $P(-3\le\xi<1)$, $P(\xi<0)$, если СВ ξ задана плотностью распределения $p(x)=$ $=\dfrac{1}{5\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{25}(x+2)^2}$.

122. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная СВ с параметрами $a=173$ см, $\sigma=6$ см, найти доли костюмов 3-го роста (170–176 см) и 4-го роста (176–182 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.

123. Детали, выпускаемые цехом, имеют диаметры, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 5 мм и среднеквадратичным отклонением 0,9 мм. Найти:

а) вероятность того, что диаметр наугад взятой детали находится в пределах от 4 мм до 7 мм;

б) с помощью правила «трех сигм» определить границы, в которых будут находиться диаметры деталей.

124. Определить среднеквадратичное отклонение ошибки прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные ошибки распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,95 не выходят за пределы ±20 мм.

125. Ошибка измерительного прибора считается нормально распределенной СВ со среднеквадратичным отклонением 3 мм. Систематическая ошибка отсутствует. Какова вероятность того, что измерение, сделанное с помощью этого прибора, превысит истинное значение измеряемой величины более чем на 5 мм?

126. Размер диаметра втулок можно считать нормально распределенной СВ ξ с $M(\xi)=2{,}5$ и дисперсией $D(\xi)=0{,}01$ мм^2. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,9973?

127. Изделие, изготовленное станком-автоматом, считается стандартным, если отклонение его размера от номинала не превышает 10 мм. Случайные ошибки отклонения размера от номинала распределены по нормальному закону распределения с параметрами $a = 0$ мм и $\sigma = 5$ мм. Определить процент стандартных изделий для данного автомата.

128. Двумерная СВ (ξ, η) задана законом распределения.

	ξ		
η	2	3	4
2	0,3	0,15	0,05
3	0,15	0,10	0,05
4	0,05	0,05	0,05
5	0,05	0	0

Найти законы распределения составляющих ξ и η.

129. Закон распределения дискретной двумерной СВ (ξ, η) задан таблицей.

	ξ			
η	1	2	3	4
0	0,04	0,08	0,06	0,02
1	0,15	0,20	0,12	0,03
2	0,01	0,22	0,02	0,05

Найти условный закон распределения СВ ξ при $\eta = 1$. Являются ли независимыми СВ ξ и η?

130. Задана функция распределения двумерной СВ (ξ, η)

$$F(x, y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Найти вероятность того, что в результате испытания составляющие ξ и η примут соответственно значения $\xi < 2, \eta < 4$.

131. Найти плотность распределения вероятностей $p(x, y)$ двумерной СВ (ξ, η) по известной функции распределения

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\right).$$

132. Двумерная СВ (ξ, η) имеет плотность распределения вероятностей

$$p(x, y) = \frac{a}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Требуется: а) определить величину a; б) найти интегральную функцию распределения $F(x, y)$; в) вычислить вероятность того, что ξ и η примут соответственно значения $\xi < 4, \eta < 5$.

Ответы

1. а) да; б) нет. **2.** а) да; б) нет. **3.** Обозначим через П – попадание в цель, а через М – непопадание в цель – мимо. Тогда пространство элементарных событий $\Omega = \{ПП, ПМ, МП, ММ\}$. **4.** а) $(A_5^4)_{\text{повт}} = 5^4 = 625$; б) $n = A_5^4 = 120$. **5.** $n = 6! = 720$. **6.** $n = A_5^3 = 60$. **7.** $n = C_{20}^3 = 1140$. **8.** $n = C_6^3 C_6^4 = 300$. **9.** $n = C_6^2 C_5^3 = 150$. **10.** $n = A_{10}^3 = 720$. **11.** $n = C_{10}^3 = 120$. **12.** $n = 5! = 120$; $P_5 = 5! = 120$. **13.** $P = \frac{1}{5}$. **14.** а) $P = \frac{1}{6}$; б) $P = \frac{1}{2}$. **15.** $P = \frac{C_7^3 C_5^2}{C_{12}^5} = \frac{175}{396} \approx 0{,}4419$. **16.** $P = \frac{1}{9}$. **17.** а) $P = \frac{1}{6}$; б) $P = \frac{1}{2}$; в) $P = \frac{2}{3}$. **18.** а) $P = \frac{1}{6}$; б) $P = 0$. **19.** $P = \frac{2}{A_5^3} = \frac{1}{60}$. **20.** а) $P = \frac{5}{18}$; б) $P = \frac{11}{36}$; в) $P = \frac{5}{18}$. **21.** $P = \frac{C_4^2 C_{32}^2}{C_{36}^4} = \frac{992}{19\,635} \approx 0{,}0505$. **22.** $P = \frac{C_{15}^3 C_{10}^2}{C_{25}^5} = \frac{195}{506} \approx 0{,}3854$. **23.** $P = \frac{2!2!}{4!} = \frac{1}{6}$. **24.** $P = \frac{C_7^4 C_3^2}{C_{10}^6} = 0{,}5$. **25.** $P = \frac{C_{15}^3 C_9^2 C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{24}{145} \approx 0{,}1655$. **26.** $P = \frac{1}{15}$. **27.** $P = \frac{2}{5!} = \frac{1}{60}$. **28.** $P = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$. **29.** $P = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3125}$. **30.** $P = \frac{1}{180}$. **31.** $P = \frac{1}{216}$. **32.** $P = \frac{C_{25}^3 + C_{25}^2 C_5^1}{C_{30}^3} \approx 0{,}936$. **33.** а) $P = \frac{2}{3}$; б) $P = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{20}{28} = \frac{15}{203}$; в) $P = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{8}{28} = \frac{6}{203}$. **34.** а) $P = 0{,}398$; б) $P = 0{,}504$; в) $P = 0{,}994$. **35.** $P = 0{,}306$.

36. $P=0{,}56$. **37.** $P(A)=0{,}323$; $P(B)=0{,}0868$; $P(C)=0{,}5382$. **38.** а) $P=$ $=0{,}188$; б) $P=0{,}788$. **39.** а) $P=0{,}188$; б) $P=0{,}788$; в) $P=0{,}024$. **40.** а) $P=0{,}38$; б) $P=0{,}5$; в) $P=0{,}12$. **41.** а) $P=0{,}936$; б) $P=0{,}064$. **42.** $P(A)=0{,}008$; $P(B)=0{,}992$; $P(C)=0{,}488$; A и B несовместные события. **43.** а) $P=\frac{1}{6}$; б) $P=\frac{5}{6}$. **44.** $P=0{,}969$. **45.** $P=\frac{49}{120}$. **46.** $P=0{,}974$. **47.** $P=0{,}895$. **48.** $P=0{,}996$. **49.** $P=\frac{11}{25}$. **50.** $P=\frac{49}{330}$. **51.** $P=\frac{3}{10}$. **52.** $P=0{,}846(6)$. **53.** а) $P=0{,}0345$; б) $P_1=\frac{125}{345}, P_2=\frac{140}{345}, P_3=\frac{80}{345}$. **54.** $P=0{,}952$. **55.** $P=0{,}345$. **56.** $P=P_8(3)=C_8^3(0{,}4)^3(0{,}6)^5\approx 0{,}2787$. **57.** а) 3 партии из 4; б) 2 партии из 4. **58.** а) $P=0{,}77$; б) $P=0{,}02$. **59.** $P=P_5(0)+P_5(4)=\frac{3}{16}\approx 0{,}1875$. **60.** $P=P_5(4)+P_5(5)=0{,}73728$. **61.** $P=P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)\approx 0{,}3723$. **62.** 5. **63.** 24 или 25. **64.** $P=0{,}8$. **65.** $P=1-P_8(0)-P_8(1)=0{,}633$. **66.** $P=C_5^4p^4q+p^5=0{,}33696$. **67.** $P=$ $=C_4^3q^3p+q^4=0{,}272$. **68.** а) $P_{300}(k=75)\approx 0{,}0532$; б) $P_{300}(k=85)\approx 0{,}2196$. **69.** $P_{200}(k=100)\approx 0{,}0517$. **70.** $P_{100}(40\le k\le 55)\approx 0{,}6826$. **71.** $P_{1100}(0\le$ $\le k\le 17)\approx 0{,}965$. **72.** $P_{900}(790\le k\le 830)\approx 0{,}9737$. **73.** а) $P_{1000}(450)\approx$ $\approx 0{,}0017$; б) $P_{1000}(400\le k\le 550)\approx 0{,}9992$; в) $P_{1000}(k>520)\approx 0{,}1038$. **74.** а) $P_{500}\times(k=0)\approx 0{,}368$; б) $P_{500}(k\ge 1)\approx 0{,}632$. в) $P_{500}(k\le 2)\approx$ $\approx 0{,}920$. **75.** $P_{1000}\times(k\ge 5)\approx 0{,}3741$. **76.** а), г).

77.

ξ	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ \frac{5}{6}, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

78.

ξ	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0, \\ 0{,}36, & \text{если} \quad 0<x\le 1, \\ 0{,}84, & \text{если} \quad 1<x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$$

79.

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0, \\ 1/8, & \text{если} \quad 0<x\le 1, \\ 1/2, & \text{если} \quad 1<x\le 2, \\ 7/8, & \text{если} \quad 2<x\le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$$

80.

ξ	0	1	2
P	0,49	0,42	0,09

81. а)

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le -2, \\ 0{,}1, & \text{если} \quad -2<x\le -1, \\ 0{,}3, & \text{если} \quad -1<x\le 0, \\ 0{,}5, & \text{если} \quad 0<x\le 1, \\ 0{,}9, & \text{если} \quad 1<x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2; \end{cases}$$

б) $P(-1\le\xi\le 1)=P(\xi=-1)+P(\xi=0)+P(\xi=1)=0{,}8.$

82.

ξ	0	1	2	3
P	0,42	0,45	0,12	0,01

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 0,42, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ 0,87, & \text{если} \quad 1<x\le 2,\\ 0,99, & \text{если} \quad 2<x\le 3,\\ 1, & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$$

83. а) $a=0,5;$ б) $P(1\le\xi<3)=0,8;$ $P(\xi\ge -2)=0,8;$ $P(\xi=2,5)=0;$

в)
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le -3,\\ 0,2, & \text{если} \quad -3<x\le 1,\\ 0,5, & \text{если} \quad 1<x\le 2,\\ 1, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

84. $M(\xi)=\dfrac{7}{2};$ $D(\xi)=\dfrac{35}{12}.$ **85.** $\sigma(\xi)=2.$ **86.** а) $a=0,2;$ б) $M(\xi)=4,5;$ $D(\xi)=8,05;$ $\sigma(\xi)\approx 2,8;$ в) $P(\xi=2)=0,4;$ $P(\xi=3)=0;$ $P(\xi\le 4)=0,7;$ $P\big(M(\xi)-3<\xi\le 7\big)=0,9;$ $P\Big(\big|\xi-M(\xi)\big|<\sigma(\xi)\Big)=0,9;$

г)
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 2,\\ 0,4, & \text{если} \quad 2<x\le 4,\\ 0,7, & \text{если} \quad 4<x\le 7,\\ 0,9, & \text{если} \quad 7<x\le 11,\\ 1, & \text{если} \quad x>11.\end{cases}$$

87.

ξ	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

$M(\xi)=0,8;$ $D(\xi)=0,48;$ $P\big(\xi=M(\xi)\big)=0;$ $P\big(\xi<M(\xi)\big)=0,36.$

88.

ξ	0	1	2
P	0,2	0,5	0,3

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 0,2, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ 0,7, & \text{если} \quad 1<x\le 2,\\ 1, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

89.

ξ	0	1	2
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

$M(\xi)=\frac{2}{3}$; $D(\xi)=\frac{7}{18}$.

90. $M(\xi)=2{,}1$. Приблизительно два попадания

91.

ξ	0	1	2	3	4
P	0,4	0,24	0,144	0,0864	0,1296

$M(\xi)=1{,}3056$. Приблизительно один промах.

92.

а)

ξ	0	1	2
P	0,2	0,6	0,2

$P(\xi\geq 2)=0{,}2$;

б)

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

$P(\xi\geq 2)=\frac{1}{15}$.

93. а) $a=\frac{1}{3}$; б) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\leq 1,\\ \frac{1}{3}, & \text{если} \quad 1<x\leq 4,\\ 0, & \text{если} \quad x>4;\end{cases}$ в) $M(\xi)=2{,}5$; $D(\xi)=0{,}75$; $\sigma(\xi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $P(0<\xi<2)=\frac{1}{3}$; $P(\xi\geq 2)=\frac{2}{3}$; $P(\xi=1{,}5)=0$; $P\left(\xi>M(\xi)\right)=$ $=0{,}5$; $P\left(\left|\xi-M(\xi)\right|<\sigma(\xi)\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

94. а) $a=\frac{1}{27}$; б) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\leq 0,\\ \frac{x^2}{2}, & \text{если} \quad 0<x\leq 3,\\ 0 & \text{если} \quad x>3;\end{cases}$ в) $M(\xi)=2{,}25$;

$D(\xi)=0{,}3375;\ \sigma(\xi)\approx 0{,}58;$ г) $P(1<\xi\le 5)=\dfrac{26}{27};\ P(\xi\ge 2)=\dfrac{19}{27};$ $P(\xi=4)=0.$

95. а) $a=\dfrac{1}{6};$ б) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x\le 0,\\ \dfrac{1}{6}(2x-1) & \text{если}\quad 0<x\le 3,\\ 0 & \text{если}\quad x>3;\end{cases}$

в) $M(\xi)=\dfrac{20}{9};\ D(\xi)=\dfrac{23}{81};\ \sigma(\xi)=\dfrac{\sqrt{23}}{9};$ г) $P(0\le\xi<2)=\dfrac{1}{3};\ P(\xi<1{,}5)=$ $=\dfrac{1}{8};\ P(\xi=1{,}5)=0;\ P(\xi>M(\xi))=0{,}547;\ P(|\xi-M(\xi)|<\sigma(\xi))=0{,}221.$

96. $P(1\le\xi<2{,}5)=\dfrac{11}{16};\ P(\xi\ge 0{,}5)=\dfrac{63}{64}.$ **97.** а) $a=\dfrac{1}{3};$ б) $M(\xi)=1{,}5;$ $D(\xi)=\dfrac{3}{4};\ \sigma(\xi)=\dfrac{\sqrt{3}}{2};$ в) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{3}, & \text{если}\quad 0<x\le 3,\\ 1, & \text{если}\quad x>3.\end{cases}$ $P(1\le\xi<3)=\dfrac{2}{3};$

г) $P(\xi\ge 0{,}5)=\dfrac{5}{6};$ $P(\xi=M(\xi))=0.$ **98.** а) $a=2;$ б) $M(\xi)=1;$ $D(\xi)=\dfrac{1}{6};\ \sigma(\xi)=\dfrac{\sqrt{6}}{6};$

в) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x\le -0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{если}\quad 0<x\le 1,\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1, & \text{если}\quad 1<x\le 2,\\ 1, & \text{если}\quad x>2;\end{cases}$

г) $P(1\le\xi<3)=\dfrac{2}{3};\ P(\xi\ge 0{,}5)=\dfrac{7}{8};\ P\big(\xi=M(\xi)\big)=0.$ **99.** $P(1\le\xi<2{,}5)=$ $=\dfrac{11}{16};\ P(\xi\ge 0{,}5)=\dfrac{117}{128}.$ **100.** $M(\xi)=-\dfrac{1}{6};\ D(\xi)=\dfrac{8}{9};$ $\sigma(\xi)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3};$

$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le -2,\\ 0,5+0,25x, & \text{если} \quad -2<x\le 0,\\ 0,5+0,5x^2, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ 1, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$ **101.** а) $a=\dfrac{1}{2}$; б) $P\left(0<\xi<\dfrac{\pi}{4}\right)\approx$ $\approx 0,147$; в) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & \text{если} \quad 0<x\le\pi,\\ 1, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$ **102.** Биномиальный закон распределения с параметрами $n=4$; $p=\dfrac{1}{6}$; $M(\xi)=\dfrac{2}{3}$; $D(\xi)=\dfrac{5}{9}$. **103.** Биномиальный закон распределения с параметрами $n=4$; $p=0,2$; $M(\xi)=2$; $D(\xi)=1,6$. **104.** СВ ξ подчинена биномиальному закону распределения с параметрами $n=10$; $p=0,05$; $M(\xi)=0,5$; $D(\xi)=0,475$. **105.** $P(\xi\le 1)=0,8192$. **106.** Биномиальное распределение с параметрами $n=1000$, $p=0,002$; хорошо аппроксимируется распределением Пуассона с параметрами $\lambda=2$, $M(\xi)=D(\xi)\approx 2$. **107.** Биномиальное распределение с параметрами $n=2000$, $p=0,001$; хорошо аппроксимируется распределением Пуассона с параметрами $\lambda=2$, $M(\xi)=D(\xi)\approx 2$, $P(\xi=3)\approx 0,1804$. **108.** Биномиальное распределение с параметрами $n=6000$, $p=0,005$; хорошо аппроксимируется распределением Пуассона с параметрами $\lambda=3$, $M(\xi)=D(\xi)\approx 3$, $P(\xi>2)\approx 0,2240$. **109.** Биномиальное распределение с параметрами $n=500$, $p=0,002$; хорошо аппроксимируется распределением Пуассона с параметрами $\lambda=1$, $M(\xi)=D(\xi)\approx 1$. **110.** $M(\xi)=$ $=1000$; $P\big(\xi<M(\xi)\big)=0,632$. **111.** $M(\xi)=20$; $D\big(\xi>M(\xi)\big)=0,368$. **112.** $P(1)=0,3679$, $P(2)=0,1839$, $P(3)=0,1613$, $P(4)=0,0153$. **113.** $M(\xi)=$ $=5$; $D(\xi)=3$; $P(0\le\xi<6)=\dfrac{2}{3}$; $P(6\le\xi<7)=\dfrac{1}{6}$; $P(\xi\ge 5)=0,5$; $P(\xi=8)=0$. **114.** $P(3<\xi<5)=0,4$. **115.** $P=0,2$. **116.** $p(x)=$ $=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 0,5, & \text{если} \quad 0<x\le 2,\\ 0, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 0,5x, & \text{если} \quad 0<x\le 2,\\ 1, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$ $P(0<\xi<0,5)=0,25$.

117. $P=0{,}4$. **118.** $P=0{,}5$. **119.** $P(4\le\xi<6)\approx0{,}2586$; $P(6\le\xi<10)\approx$ $\approx0{,}3232$; $P(\xi\ge3)\approx0{,}2514$; $P(\xi=3)\approx0$. **120.** $P(0\le\xi<6)\approx0{,}4514$; $P(6\le\xi<7)\approx0{,}0624$; $P(\xi\ge2)\approx0{,}5793$; $P(\xi=2)=0$. **121.** $M(\xi)=$ $=-2; D(\xi)=12{,}5$; $P(-3\le\xi<1)\approx0{,}4126$; $P(\xi<0)\approx0{,}7157$. **122.** $P(170<$ $<\xi<176)\approx0{,}383$; $P(176<\xi<176<182)\approx0{,}247$, т. е. костюмов 3-го и 4-го роста должно быть примерно 38% и 24% соответственно. **123.** а) $P=0{,}85$; б) (2,3 мм; 7,7 мм). **124.** $\sigma\approx10{,}2$мм. **125.** $P=0{,}0475$. **126.** (2,2 мм; 2,8 мм). **127.** 95,44%. **128.** Законы распределения составляющих ξ и η имеют вид

ξ	2	3	4
p_i	0,55	0,30	0,15

η	2	3	4	5
q_i	0,50	0,30	0,15	0,05

129. При условии $\eta=1$ СВ ξ имеет следующий закон распределения

ξ	2	3	4	5
$P(x_i/\eta=1)$	0,30	0,40	0,24	0,06

Безусловный закон распределения имеет вид

ξ	2	3	4	5
p_i	0,2	0,5	0,1	0,1

Так как условный и безусловный законы не совпадают, то СВ ξ и η являются зависимыми.

130. $P(\xi<2,\eta<4)=(1-e^{-2})(1-e^{-4})\approx0{,}849$. **131.** $p(x,y)=$ $=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$. **132.** а) $a=20$; б) $F(x,y)=\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\times$ $\times\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{5}+\dfrac{1}{2}\right)$; в) $P(\xi<4,\eta<5)=\dfrac{9}{16}$.

Тема 6 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые, однородные, случайные явления, на основе изучения статистических данных – результатов наблюдений

6.1. Основные понятия математической статистики

Словом ***совокупность*** (***статистическая совокупность***, ***статистический массив***) в статистике принято называть множество отдельных, отличающихся друг от друга и в то же время чем-то схожих объектов, над которыми производятся наблюдения. Совокупность состоит из ***членов***, объединенных, по крайней мере, одним общим признаком. Этот признак является основой или критерием для образования статистической совокупности. Объединяющие признаки могут быть разбиты на две группы:

1. ***Качественные признаки.*** Под качественными понимают такие признаки, которыми исследуемый объект либо обладает, либо нет. Характерной чертой данных признаков является то, что они не могут быть измерены, например расовая принадлежность, цвет глаз, исповедуемая религия и т. д.

2. ***Количественные признаки.*** В отличие от качественных признаков, это признаки, которые могут быть измерены, т. е. описаны количественно. Они могут быть определены путем подсчета, измерения, например число детей в каждой из семей исследуемого населенного пункта, возраст старшего ребенка в каждой из этих семей, его вес и т. д. Даже из такого простого примера видно, что количественные признаки образуют два различных класса:

– *дискретные признаки*, которые могут быть описаны набором величин (число детей в семье), причем промежуточные значения признака смысла не имеют (полтора ребенка в семье);

– *непрерывные признаки*, которые принимают любое значение внутри некоторого интервала (вес ребенка).

Генеральной совокупностью называется множество всех возможных объектов, которые нужно обследовать относительно некоторого признака. Число объектов генеральной совокупности, если оно конечно, называется ***объемом генеральной совокупности*** и обозначается *N*. Если каждому объекту поставить в соответствие некоторое число x_i, то генеральную совокупность можно рассматривать как случайную величину ξ с возможными значениями $x_i, i \in \overline{1, N}$.

Поскольку обследование всех объектов генеральной совокупности связано со значительными трудностями, а иногда его невозможно выполнить, то обследуют, как правило, часть объектов (выборку) и на основании характеристик и свойств выборки делают заключения о характеристиках и свойствах генеральной совокупности. Такой подход называется ***выборочным методом.*** Например, нужно выяснить мнение населения страны относительно некоторого вопроса. Ясно, что опросить всех жителей страны практически невозможно, поэтому опрашивают только некоторую группу населения. Здесь все население – это генеральная совокупность, а выбранная группа – это выборка.

Выборкой называется множество отобранных объектов из генеральной совокупности. Число объектов в выборке называется ***объемом выборки*** и обозначается *n*.

Если генеральную совокупность рассматривать как случайную величину ξ, то выборкой объема *n* называется множество $x_1, x_2, ..., x_n$, наблюдаемых значений изучаемой случайной величины, которые соответствуют *n* независимым испытаниям (опытам).

Основное предположение математической статистики. Выборочные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ являются независимыми в совокупности и одинаково распределенными (с теоретической функцией распределения $F(x)$ СВ).

Объем выборки может быть как большим, так и сравнительно малым. Ее размер определяется той степенью точности, которая требуется при соотнесении статистических данных выборки и соответствующих параметров генеральной совокупности. Очевидно, что точность оценки зависит от объема выборки. Это имеет место хотя бы потому, что по мере того, как выборка укрупняется, вклад каждого члена уменьшает отклонения в наблюдаемых значениях, вызванные погрешностями наблюдений. Другими словами, чем больше объем выборки, тем более надежно она представляет генеральную совокупность. Следует, однако, полагать, что как бы хорошо выборка не представляла генеральную совокупность, полного совпадения выборочных характеристик с характеристиками генеральной совокупности не бывает. Погрешность, свойственную результатам всякого исследования, проведенного на основе выборки, называют ***ошибкой выборочности (ошибкой репрезентативности)***.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки «правильно» представляли генеральную совокупность, т. е. выборка должна быть ***репрезентативной (представительной).***

Выборка называется ***представительной*** или ***репрезентативной***, если она адекватно отображает все слои генеральной совокупности.

Например, для определения роста молодых людей в возрасте от 20 до 30 лет были рассмотрены три выборки объема $n = 50$. Первая выборка проводилась среди баскетболистов, вторая – среди лилипутов в цирке на их представлении и третья – среди людей, выходящих из метро. Ясно, что ни первая, ни вторая выборки не будут представительными, а вот третья выборка, если объекты выбирались случайным образом, будет репрезентативной.

Выборка называется ***повторной***, если отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность, ***бесповторной*** – если не возвращается.

На практике чаще всего пользуются бесповторной выборкой. Следует отметить, что если число объектов генеральной совокупности большое, а выборка составляет незначительную часть генеральной совокупности, то различия между повторной и бесповторной выборками стираются.

Выделяют различные **методы организации выборки.**

1. Отбор называется ***простым случайным***, если объекты извлекаются из генеральной совокупности по одному случайным образом. Осуществить такой отбор можно с помощью готовых таблиц случайных чисел. Для этого объекты генеральной совокупности нумеруют. Чтобы сделать простую случайную выборку объема n, из таблицы случайных чисел выписываем подряд n чисел, начиная с любого (числа больше N – максимальный номер генеральной совокупности пропускаем). Затем в выборку берем те объекты, номера

которых совпадают с выписанными случайными числами. Это самый распространенный отбор.

2. Отбор называется ***типическим***, если объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из некоторой ее части. Например, однотипные изделия изготавливаются несколькими станками. Отбор производят из совокупности изделий, изготовленных только одним станком.

3. ***Серийный***, или ***гнездовой***, отбор. Генеральная совокупность предварительно делится на группы, называемые сериями или гнездами. Затем из общего количества серий отбирается необходимое их число для совместной обработки. При этом серии могут быть как равными по объему, так и различаться. *Например*, из 100 студенческих групп некоторого университета выбирают 15 групп, члены которых объединяются в одну статистическую совокупность для совместной обработки. Таким образом, в отличие от типического отбора из генеральной совокупности отбираются не отдельные единицы, а целые серии относительно однородных единиц.

6.2. Статистический ряд. Статистическое распределение

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n.

Вариационным рядом выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ называется способ ее записи, при котором элементы выборки упорядочены (как правило, в порядке неубывания): $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$. Разность между максимальным и минимальным элементами называется ***размахом выборки***:

$$W = x_{\max} - x_{\min}.$$

Пусть в выборке элемент x_1 наблюдался m_1 раз, элемент x_2 – m_2 раз,…, x_k– m_k раз, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, где k – число различных элементов выборки. Наблюдаемые значения x_i называются ***вариантами выборки***. Число m_i называется ***частотой***, а $\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$ – ***относительной частотой варианты*** x_i. Последовательность пар (x_i, m_i) называется ***статистическим рядом***. Обычно статистический ряд записывается в виде табл. 6.1 и называется ***группированным статистическим рядом.***

Таблица 6.1

Группированный статистический ряд

x_i	x_1	x_2	...	x_k
m_i	m_1	m_2	...	m_k

При изучении непрерывной случайной величины или при большом объеме выборки (больше 30) ее элементы объединяют в группы (разряды) и записывают в виде ***интервального статистического ряда*** (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Интервальный статистический ряд

Интервал	$[x_{\min}; x_1)$	$[x_1; x_2)$	...	$[x_{k-1}; x_k]$
Частота	m_1	m_2	...	m_k

Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, разбивают на k непересекающихся интервалов. Под частотой интервала понимают число членов совокупности, варианта которых лежит в данном интервале. Число интервалов k следует брать не очень большим, как правило, $6 \le k \le 20$, чтобы после группировки ряд не был ни громоздким, ни очень малым, иначе потеряются особенности распределения признака. Рекомендуемое число интервалов можно найти по формуле Стерджесса: $k = 1 + 3{,}2\lg n$. Следует отметить, что эта формула не является строго обязательной. В зависимости от конкретной задачи для упрощения вычислений число интервалов может быть увеличено или уменьшено на один, два. Вычисления значительно упрощаются, если все интервалы имеют одинаковую длину $h = \dfrac{W}{k}$. Если окажется, что h – дробное число, то за длину интервала следует брать либо ближайшее целое число, либо ближайшую простую дробь. В силу этого x_k не обязательно равно $x_{\max}$.

Если в качестве выборочных значений берутся середины x_i^* полученных интервалов, то соответствующий интервальный ряд называется ***группированным интервальным рядом*** (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Группированный интервальный ряд

Интервал	x_1^*	x_2^*	...	x_k^*
Частота	m_1	m_2	...	m_k

Перечень наблюдаемых значений (или интервалов наблюдаемых значений) и соответствующих им относительных частот ω_i называется ***статистическим законом распределения случайной величины*** ξ (статистическое распределение выборки) (табл. 6.4, 6.5).

Таблица 6.4

Статистический закон распределения группированного ряда

x_i	x_1	x_2	…	x_k
$\omega_i = \frac{n_i}{n}$	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_2}{n}$	…	$\frac{m_k}{n}$

Таблица 6.5

Статистический закон распределения интервального статистического ряда

Интервал	$[x_{\min}; x_1)$	$[x_1; x_2)$	…	$[x_{k-1}; x_k]$
$\omega_i = \frac{n_i}{n}$	$\omega_1 = \frac{m_1}{n}$	$\omega_2 = \frac{m_2}{n}$	…	$\omega_k = \frac{m_k}{n}$

Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$.

6.3. Графическое изображение статистических рядов. Эмпирическая функция распределения

Для наглядного представления выборки используют полигон (для статистического ряда) и гистограмму (для интервального статистического ряда) относительных частот (частот).

Полигоном частот статистического ряда называется ломаная линия с вершинами в точках $(x_i, m_i), i = \overline{1, k}$ (рис. 6.1).

Полигоном относительных частот статистического ряда называется ломаная линия с вершинами в точках $\left(x_i, \frac{m_i}{n}\right), i = \overline{1, k}$.

Гистограммой относительных частот (***частот***) интервального статистического ряда называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах группирования с высотой прямоугольников $\frac{m_i}{n\,h}$ $(\frac{m_i}{h})$ (рис. 6.2).

Площадь каждого прямоугольника равна $\frac{m_i}{n}$ (m_i), а сумма площадей всех прямоугольников гистограммы относительных частот равна 1.

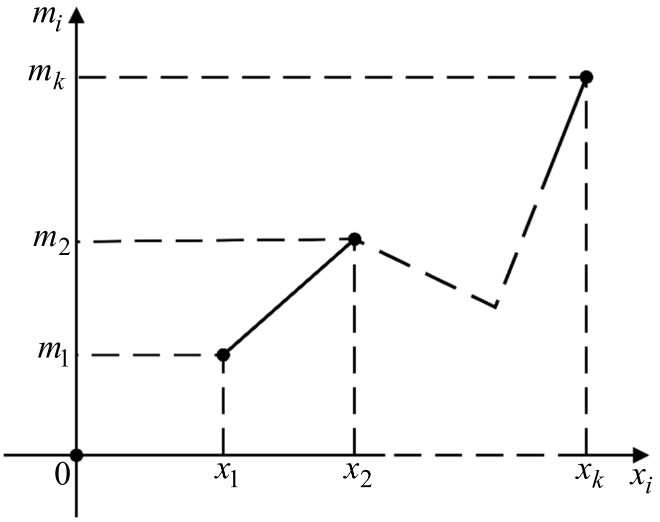


Рис. 6.1. Полигон частот

Гистограмму и полигон удобно использовать для визуального подбора *модели закона распределения* генеральной совокупности (случайной величины ξ).

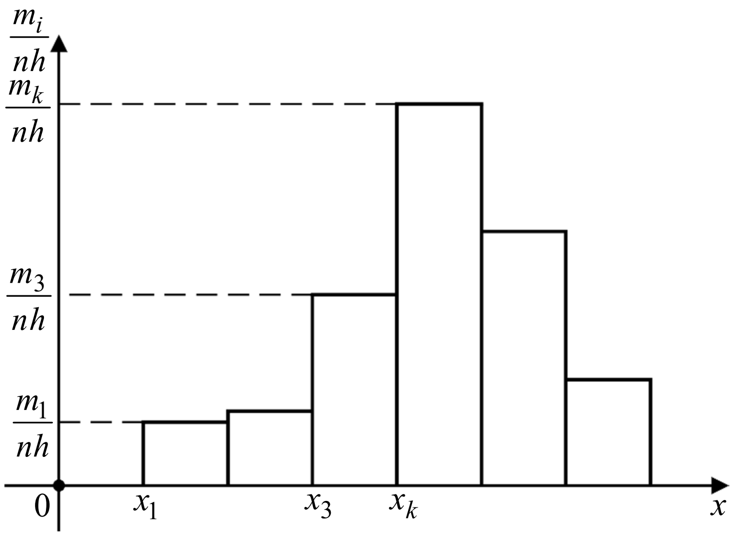


Рис. 6.2. Гистограмма относительных частот

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $\xi < x$, т. е.

$$F^*(x) = \frac{m_x}{n},$$

где m_x – накопленная частота – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

В отличие от эмпирической функции распределения выборки, функцию $F(x)$ распределения генеральной совокупности называют ***теоретической функцией распределения.*** Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $\xi < x$, а функция $F^*(x)$ – относительную накопленную частоту этого же события.

Функция $F^*(x)$ обладает всеми свойствами функции $F(x)$ и является приближенным представлением последней.

ПРИМЕР 1. По выборке 5, 2, 2, 1, 6, 3, 1, 2, 3, 5 записать:

а) вариационный ряд;

б) статистический ряд;

в) статистический закон распределения СВ;

г) построить полигон частот;

д) эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

Решение.

а) вариационный ряд имеет вид – 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6;

б) подсчитав частоты различных значений в выборке, запишем группированный статистический ряд.

x_i	1	2	3	5	6
m_i	2	3	2	2	1

Объем выборки равен сумме частот наблюдаемых значений:

$$n = 2 + 3 + 2 + 2 + 1 = 10;$$

в) заменив частоты m_i на относительные частоты $\omega_i = \frac{m_i}{n}$, получим статистический закон распределения СВ.

x_i	1	2	3	5	6
$\omega_i = \frac{m_i}{n}$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

г) полигон частот изображен на рис. 6.3;

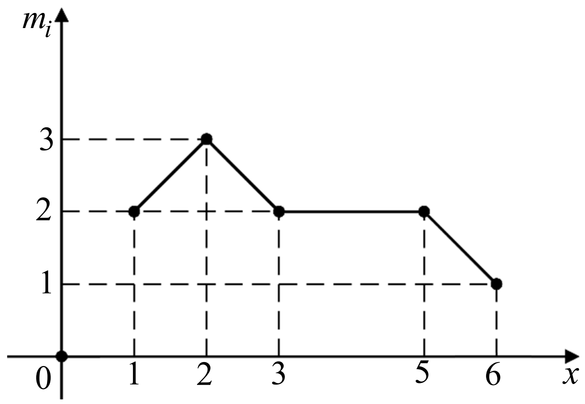


Рис. 6.3. Полигон частот примера 1

д) наименьшее выборочное значение $x_{\min} = 1$, поэтому эмпирическая функция распределения равна нулю для всех $x \le 1$. Дальше ее значение изменяется каждый раз при переходе x через значения x_i, увеличиваясь на величину относительной частоты $\omega_i = \frac{m_i}{n}$. Наибольшее выборочное значение $x_{\max} = 6$, поэтому эмпирическая функция распределения равна 1 для всех $x > 6$. Итак, эмпирическая функция распределения имеет вид

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1, \\ 0{,}2, & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}5, & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}7, & \text{если} \quad 3 < x \le 5, \\ 0{,}9, & \text{если} \quad 5 < x \le 6, \\ 1, & \text{если} \quad x > 6. \end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 6.4.

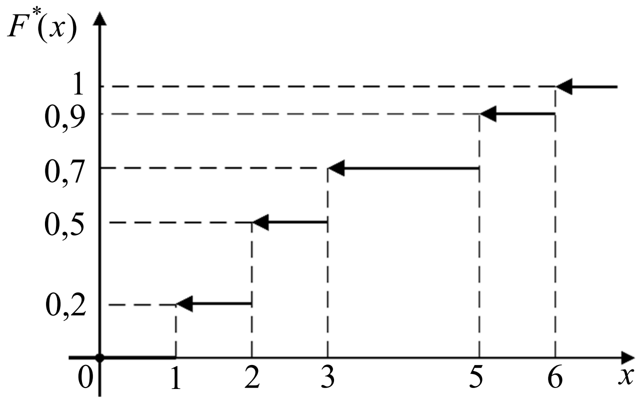


Рис. 6.4. График эмпирической функции распределения примера 1

☒ *ПРИМЕР 2.* Построить гистограмму относительных частот и эмпирическую функцию распределения по данному интервальному статистическому ряду.

Интервалы наблюдаемых значений	[5–10)	[10–15)	[15–20)	[20–25)	[25–30)	[30–35]
Частоты m_i	6	7	17	36	24	10

Решение. Объем выборки $n = 6 + 7 + 17 + 36 + 24 + 10 = 100$. Длина каждого интервала $h = 5$.

Для построения эмпирической функции распределения найдем середины интервалов x_i^* и относительные частоты $\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$. Для построения гистограммы относительных частот найдем для каждого интервала значение $\dfrac{m_i}{nh}$ и запишем все в виде следующей таблицы

Интервалы наблюдаемых значений	[5–10)	[10–15)	[15–20)	[20–25)	[25–30)	[30–35]
Середины интервалов x_i^*	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5
Частоты m_i	6	7	17	36	24	10
$\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$	0,06	0,07	0,17	0,36	0,24	0,1
$\dfrac{m_i}{nh}$	0,012	0,014	0,034	0,072	0,048	0,02

Гистограмма относительных частот представлена на рис. 6.5.

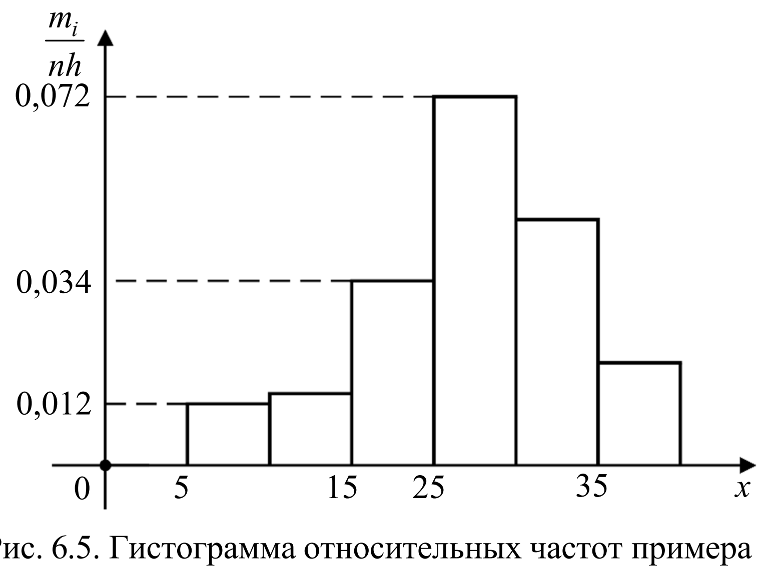


Рис. 6.5. Гистограмма относительных частот примера 2

Эмпирическая функция распределения имеет вид

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 7{,}5,\\ 0{,}06, & \text{если} \quad 7{,}5<x\le 12{,}5,\\ 0{,}13, & \text{если} \quad 12{,}5<x<17{,}5,\\ 0{,}3, & \text{если} \quad 17{,}5<x\le 22{,}5,\\ 0{,}66, & \text{если} \quad 22{,}5<x\le 27{,}5,\\ 0{,}9, & \text{если} \quad 27{,}5<x\le 32{,}5,\\ 1, & \text{если} \quad x>32{,}5.\end{cases}$$

График эмпирической функции распределения изображен на рис. 6.6.

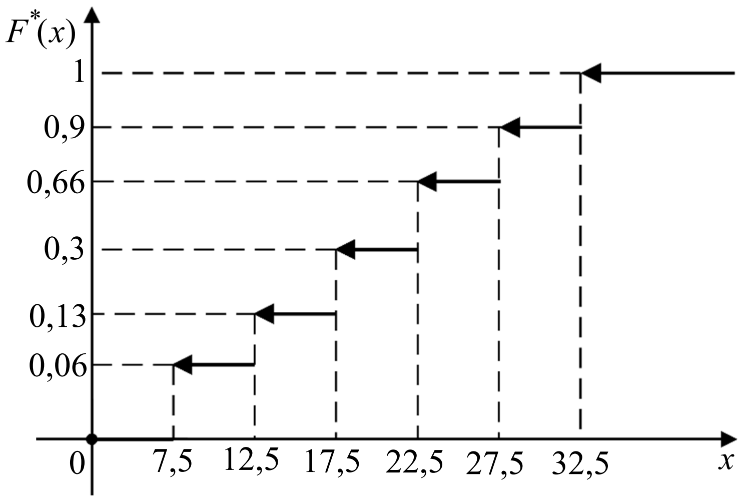


Рис. 6.6. График эмпирической функции распределения примера 2

Из рис. 6.4 и 6.6 видим, что $F^*(x)$ – график эмпирической функции распределения выборки анологичен графику теоретической функции распределения $F(x)$ генеральной совокупности.

6.4. Статистические оценки параметров распределения

Анализ полигона, гистограммы и эмпирической функции распределения дает возможность сделать предположение о законе распределения изучаемой случайной величины. Данный закон может быть установлен и на основании теоретических предположений. Затем возникает задача нахождения параметров предполагаемого закона распределения по полученной выборке. Например, если исследуемый признак имеет нормальное распределение, то нужно найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение для показательного распределения параметра λ и т. д.

Статистические данные не позволяют найти параметры распределения точно, они дают возможность только оценить их. ***Оценкой параметра*** называют значение параметра, вычисленное по выборке. Оценка параметра является приближенным значением параметра генеральной совокупности. Если истинное значение параметра обозначается θ, то оценка параметра обычно обозначается $\tilde{\theta}$. В качестве оценки параметра берут ту или иную функцию $\tilde{\theta} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ выборки, которая называется ***статистикой*** и дает приближенное значение параметра θ, вычисленное по заданной выборке.

Существует два вида оценок: точечные и интервальные.

Точечные оценки задаются одним числом, а интервальные – границами доверительного интервала.

Чтобы точечная статистическая оценка давала хорошее приближение оцениваемого параметра, она должна удовлетворять следующим требованиям:

1) состоятельность. ***Состоятельной*** называется статистическая оценка $\tilde{\theta}$, которая при $n \to \infty$ сходится по вероятности к истинному значению параметра θ, а т. е. $P(|\tilde{\theta} - \theta| < \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1$;

2) несмещенность. ***Несмещенной*** называется статистическая оценка $\tilde{\theta}$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любом объеме выборки, т. е. $M(\tilde{\theta}) = \theta$. При пользовании несмещенной оценкой $\tilde{\theta}$ вместо θ не должны возникать систематические ошибки только одного знака в сторону завышения или занижения;

3) эффективность. Если неизвестный параметр имеет несколько оценок, вычисленных по выборкам одного и того же объема n, то ***эффективной*** называется статистическая оценка, которая имеет наименьшую дисперсию.

6.5. Точечные оценки параметров распределения

Для описания выборки применяются числовые характеристики двух видов: характеристики положения значений выборки (средняя арифметическая $\bar{x}$, мода $Mo(\xi)$, медиана $Me(\xi)$; характеристики рассеивания значений выборки (выборочная дисперсия $D_в$, выборочное среднее квадратичное отклонение s).

Точечной оценкой математического ожидания $M(\xi)=a$ является ***выборочное среднее*** $\overline{x}$.

Для статистического ряда (см. табл. 6.1)

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i m_i. \qquad (6.1)$$

Для интервального статистического ряда (см. табл. 6.2)

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^* m_i. \qquad (6.2)$$

Доказано, что оценка математического ожидания является *состоятельной и несмещенной.*

Замечание. Если первоначально варианты x_i – большие числа, то для упрощения вычислений целесообразно перейти к условным вариантам. Для этого нужно из каждой варианты вычесть одно и то же число c, т. е. перейти к условным вариантам $u_i = x_i - c$. Тогда

$$\overline{x}=c+\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i u_i}{n}=c+\overline{u}.$$

☒ *ПРИМЕР 3.* Результаты измерения длины плит в сантиметрах записаны в таблице.

Варианты x_i	249,8	249,9	250,0	250,1	250,2
Частоты m_i	3	6	4	4	3

Найти среднее значение длины плиты.

Решение. Перейдем к условной варианте $U = u_i = x_i - c$, где $c = 250$, и запишем в следующей таблице.

Варианты x_i	249,8	249,9	250,0	250,1	250,2
Частоты m_i	3	6	4	4	3
Условные варианты $u_i = x_i - c$	–0,2	–0,1	0,0	0,1	0,2

Откуда имеем

$$\overline{u}=\frac{(-0,2)\cdot 3+(-0,1)\cdot 6+0\cdot 4+0,1\cdot 4+0,2\cdot 3}{20}=\frac{-0,2}{20}=-0,01;$$

$$\overline{x}=250-0,01=249,99\approx 250 \text{ см}.$$

Модой $Mo(\xi)$ дискретного вариационного ряда называется варианта, которой соответствует наибольшая частота.

В примере, рассмотренном выше, мода равна 249,9.

Медианой $Me(\xi)$ дискретного вариационного ряда называется варианта, делящая ряд на две равные части, т. е. такое число, что половина из элементов выборки не меньше него, а другая половина не больше.

Например, в рассмотренном примере медианой является варианта 250.

Если в выборке четное число элементов, медиана может быть не определена однозначно: тогда для числовых данных чаще всего используют полусумму двух соседних значений, т. е. медиану набора чисел $\{1,3,5,7\}$ принимают равной 4. В математической статистике медиана используется как одна из характеристик выборки. Следует отметить, что медиана может существенно отличатся от среднего выборочного $\overline{x}$.

⌧ *ПРИМЕР 4.* Рассмотрим среднюю и среднюю медианную зарплаты в стране. Очень высокие зарплаты в отдельных отраслях отражаются на размере «средней» по стране, но людей, получающих столь существенный доход, немного. Чтобы увидеть реальный доход населения, применяют показатель «медианная заработная плата». Он отражает сумму в центре зарплатного ряда и делит его на две равные части (50% трудящихся имеют заработок меньше этого значения, 50% – больше). Поэтому для определения уровня благосостояния населения она более показательна, чем средняя зарплата.

Например, возьмем зарплату пяти работников: четверо из них получают соответственно 400 руб., 430 руб., 500 руб., 670 руб., а один имеет доход в размере 1200 руб. В этом случае средняя зарплата будет 640 руб., а медианная зарплата составит всего 500 руб. Мы видим, что разница между средней и медианной зарплатами достаточно большая и составляет 140 руб.

Точечной оценкой дисперсии $D(\xi)$ ***является выборочная дисперсия*** $D_в$, которая вычисляется для статистического ряда (см. табл. 6.1) по формуле

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \overline{x})^2 \qquad (6.3)$$

и для интервального статистического ряда (см. табл. 6.2) по формуле

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x^*_i - \overline{x})^2. \qquad (6.4)$$

Замечание. На практике, как правило, пользуются формулой

$$D_{\text{в}} = \overline{x^2} - (\overline{x})^2. \qquad (6.5)$$

Доказано, что эта оценка является состоятельной, но смещенной.

Несмещенной оценкой дисперсии $D(\xi)$ является $s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}$.

Для статистического ряда выборки объема n она вычисляется по формуле

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{n-1} \cdot \overline{x}^2. \qquad (6.6)$$

Для интервального статистического ряда (см. табл. 6.2)

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i^* - \overline{x})^2 m_i = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i^*)^2 m_i - \frac{n}{n-1} \cdot \overline{x}^2. \qquad (6.7)$$

Замечание 1. Если первоначально варианты x_i – большие числа, то для упрощения вычислений целесообразно перейти к условным вариантам $u_i = x_i - c$, так как $D(\xi) = D(U)$.

Следует отметить, что выборочные числовые характеристики являются характеристиками данной выборки, но не являются характеристиками распределения генеральной совокупности.

ПРИМЕР 5. Найти несмещенные оценки дисперсии, если $D_{\text{в}1} = 5{,}6$ при объеме выборки $n = 11$ и $D_{\text{в}2} = 5{,}6$ при объеме выборки $n = 51$ Тогда несмещенные оценки будут

$$s_1^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}1} = \frac{11}{10} \cdot 5{,}6 = 6{,}2; \;\; s_2^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}2} = \frac{51}{50} \cdot 5{,}6 = 5{,}712.$$

Откуда видим, что при большом $n = 51$ различие между смещенной и несмещенной дисперсиями незначительное, в то время как при малом $n = 11$ существенно.

Замечание 2. На практике, если объем $n \geq 30$, то приближенно можно считать $s^2 = D_{\text{в}}$.

Оценкой среднеквадратического отклонения $\sigma(\xi)$ служит корень квадратный из несмещенной оценки дисперсии, т. е.

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}}. \qquad (6.8)$$

☒ *ПРИМЕР 6.* По выборке 5, 2, 2, 1, 6, 3, 1, 2, 3, 5 найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, несмещенную оценку дисперсии.

Решение. Составим статистический ряд.

x_i	1	2	3	5	6
m_i	2	3	2	2	1

Объем выборки $n = 2+3+2+2+1 = 10$. По формуле (6.1) найдем среднее выборочное $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1) = 3.$$

По формуле (6.5) найдем выборочную дисперсию $D_\text{в}$:

$$D_\text{в} = \frac{1}{10}(1^2\cdot 2 + 2^2\cdot 3 + 3^2\cdot 2 + 5^2\cdot 2 + 6^2\cdot 1)^2 - 3^2 = 2{,}8.$$

Несмещенная оценка дисперсии s^2.

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_\text{в} = \frac{10}{9}\cdot 2{,}8 = 3{,}11.$$

Несмещенная оценка σ (среднеквадратичного отклонения)

$$s = \sqrt{3{,}11} = 1{,}7635.$$

☒ *ПРИМЕР 7.* Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и несмещенную оценку дисперсии по данному интервальному статистическому ряду.

Интервалы наблюдаемых значений	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
Частоты m_i	6	7	17	36	24	10
Середины интервалов x_i^*	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5

Решение. Для расчета воспользуемся формулами (6.2), (6.7), где k – число интервалов равно 6; объем выборки $n = 6+7+$ $+17+36+24+10 = 100$; x_i^* – середина i-го интервала и m_i – частота наблюдений из i-го интервала записаны выше

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(7{,}5 \cdot 6 + 12{,}5 \cdot 7 + 17{,}5 \cdot 17 + 22{,}5 \cdot 36 + 27{,}5 \cdot 24 + 32{,}5 \cdot 10) =$$
$$= 22{,}25;$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{100}\Big((7{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 6 + (12{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 7 + (17{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 17 +$$
$$+ (22{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 36 + (27{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 24 + (32{,}5 - 22{,}25)^2 \cdot 10\Big) =$$
$$= 40{,}6875;$$

несмещенная оценка дисперсии $s^2 = \frac{100}{99} \cdot 40{,}6875 = 40{,}1.$

6.6. Интервальные оценки параметров распределения. Доверительный интервал для математического ожидания случайной величины, имеющей нормальное распределение

В ряде задач требуется не только найти для параметра θ оценку $\tilde{\theta}$, но и установить ее точность и надежность. Эта задача особенно актуальна при малом числе испытаний, когда замена θ его точечной оценкой $\tilde{\theta}$ может привести к серьезным ошибкам.

Требуется знать, к каким ошибкам может привести замена θ его оценкой $\tilde{\theta}$ и с какой степенью уверенности можно утверждать, что эти ошибки не выходят за известные пределы.

В математической статистике для определения точности и надежности θ пользуются доверительными интервалами и доверительной вероятностью.

Доверительной вероятностью или ***надежностью оценки*** $\tilde{\theta}$ называется вероятность γ, с которой выполняется неравенство $|\theta - \tilde{\theta}| < \varepsilon$, т. е. $\gamma = P(|\theta - \tilde{\theta}| < \varepsilon)$, где θ – оцениваемый параметр; ε – точность оценки.

Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал $(\tilde{\theta} - \varepsilon, \tilde{\theta} + \varepsilon)$, который покрывает неизвестный параметр θ с доверительной вероятностью (надежностью) γ. В практике важную роль играет длина доверительного интервала, причем чем меньше его длина, тем точнее оценка. Если длина доверительного интервала достаточно велика, то оценка малопригодна для практики. Выбор доверительной вероятности определяется конкретными условиями. Обычно используются значения 0,90; 0,95; 0,99; 0,9973. Значение $\alpha = 1 - \gamma$ называется ***уровнем значимости***.

Пусть имеется выборка объема *n* из генеральной совокупности нормально распределенной случайной величины ξ. Нужно построить доверительный интервал для математического ожидания $M(\xi)$ с заданной надежностью γ.

Рассмотрим два случая.

1. Известна дисперсия генеральной совокупности $D(\xi) = \sigma^2(\xi)$.

В этом случае доверительный интервал для математического ожидания имеет вид

$$\left(\overline{x} - t_\gamma \frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_\gamma \frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{n}}\right), \tag{6.9}$$

где t_γ – квантиль нормального распределения определяется из условия $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ и находится по таблице прил. 2; $\overline{x}$ – среднее выборочное значение; *n* – объем выборки.

Точность ε оценки

$$\varepsilon = t_\gamma \cdot \frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{n}}. \tag{6.10}$$

Замечание 1. Из формулы точности оценки (6.10) видно, что при возрастании *n* – объема выборки число ε убывает и, следовательно, точность оценки увеличивается.

Замечание 2. Если требуется оценить математическое ожидание с наперед заданными точностью ε и надежностью γ, то минимальный объем выборки будет

$$n = \frac{t_\gamma^2 \sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2}. \tag{6.11}$$

⌧ *ПРИМЕР 8.* Случайная величина ξ распределена по нормальному закону распределения с известным $\sigma(\xi) = 3$. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания, если объем выборки $n = 36$; $\overline{x} = 12,4$; $\gamma = 0,95$.

Решение. t_γ найдем из условия $\Phi(t_\gamma)=\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{0,95}{2}=0,475.$ Из прил. 2 получаем $t_\gamma=1,96$. Подставляя в формулу (6.9), получаем доверительный интервал для оценки математического ожидания:

$$\left(12,4-1,96\cdot\frac{3}{\sqrt{36}};12,4+1,96\cdot\frac{3}{\sqrt{36}}\right)=(11,42;13,38).$$

☒ *ПРИМЕР 9.* Найти минимальный объем выборки для оценки математического ожидания с точностью $\varepsilon=0,6$ и надежностью $\gamma=0,95$ для нормально распределенной случайной величины ξ с $\sigma(\xi)=2$.

Решение. Из предыдущего примера мы знаем, что $t_\gamma=1,96$ – квантиль нормального распределения, соответствующий $\gamma=0,95$. По формуле (6.11) имеем $n=\dfrac{t_\gamma^2\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2}=\dfrac{(1,96)^2\cdot 2^2}{0,36}=42,68(4)\approx 43$. Таким образом, для того чтобы получить доверительный интервал с заданными характеристиками, объем выборки должен быть не менее 43.

2. Дисперсия генеральной совокупности неизвестна.

В этом случае доверительный интервал для математического ожидания записывается по формуле

$$\left(\bar{x}-t_{\alpha,\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\alpha,\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}}\right),\tag{6.12}$$

где $t_{\alpha,\gamma}$ определяется с помощью таблицы значений распределения Стьюдента по данному числу степеней свободы $\nu=n-1$ и уровню значимости α (прил. 3). Здесь s − оценка среднеквадратического отклонения, вычисленная по выборке объема n.

Замечание. Отметим, что при объеме выборки $n>30$ вместо формулы (6.12) можно пользоваться формулой (6.9), полагая в формуле (6.9) $\sigma(\xi)=s$.

☒ *ПРИМЕР 10.* Найти доверительный интервал с надежностью $\gamma=0,95$ для математического ожидания случайной величины ξ, распределенной по нормальному закону распределения по выборке: –2,5; 3,4;–2,0; 1,0; 2,1.

Решение. По данной выборке найдем оценки математического ожидания и дисперсии: $\overline{x}, s^2$. Объем выборки $n = 5$.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{-2,5+3,4-2,0+1,0+2,1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4;$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i^{\,2} - \overline{x}^2 = \frac{(-2,5)^2+(3,4)^2+(-2,0)^2+(1,0)^2+(2,1)^2}{5} - (0,4)^2 = \\ = 5,28;$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_{\text{в}} = \frac{5}{4}\cdot 5,28 = 6,6;\;\; s = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{6,6} \approx 2,56.$$

При уровне значимости $\alpha = 1-\gamma = 1-0,95 = 0,05$ и числе степеней свободы $\nu = n-1 = 5-1 = 4$ по прил. 3 находим $t_{\alpha;\,\nu} = t_{0,05;\,4} = 2,78$. По формуле (6.12) запишем доверительный интервал для оценки математического ожидания:

$$\left(0,4 - 2,78\cdot\frac{2,56}{\sqrt{5}};\, 0,4 + 2,78\cdot\frac{2,56}{\sqrt{5}}\right) = (-2,78;\, 3,58).$$

6.7. Статистические гипотезы

Статистической гипотезой H называется всякое высказывание (предположение) о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Например, гипотеза о том, что производительность труда рабочих, выполняющих одинаковую работу в одинаковых организационно технических условиях, имеет нормальный закон распределения, является гипотезой о законе распределения.

Гипотеза о том, что средние размеры деталей, производимых на однотипных, параллельно работающих станках, не различаются между собой, является гипотезой о параметрах распределения.

Нулевой (или ***основной***) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (или ***альтернативной***) называют гипотезу H_1, являющуюся логическим отрицанием гипотезы H_0.

Правило, по которому можно принять или отклонить гипотезу H_0, называется ***статистическим критерием*** (или просто ***критерием***) проверки гипотезы H_0.

Статистический критерий – это специально подобранная случайная величина K, точное или приближенное распределение которой известно, являющаяся функцией от результатов наблюдений.

При проверке гипотез могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза H_0, а принята альтернативная H_1. Вероятность ошибки первого рода $P(H_1 / H_0) = \alpha$ называется ***уровнем значимости***.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята основная гипотеза H_0 при условии, что действительно верна альтернативная гипотеза H_1. Вероятность ошибки 2-го рода $P(H_0 / H_1) = \beta$.

Вероятность принять основную гипотезу H_0 при условии, что она действительно верна – $P(H_0 / H_0) = \gamma$ называется ***уровнем доверия.***

Вероятность принять альтернативную гипотезу H_1 при условии, что она верна – $P(H_1 / H_1) = 1 - \beta$ ***называется мощностью критерия.***

Принятие ошибок 1-го и 2-го можно записать в следующем виде.

Основная гипотеза H_0	H_0 – принимается	H_0 – отвергается
Верна	Правильное решение	Ошибка 1-го рода
Ошибочна	Ошибка 2-го рода	Правильное решение

Ошибки 1-го и 2-го рода имеют разные последствия. Ошибки 1-го рода – это обычно «убытки производителя». Например, при производстве продукции могут возникнуть незапланированные расходы или риск реализации продукции и т. п. Ошибки 2-го рода – «риск потребителя». Например, купленный товар окажется с браком или не будет соответствовать заявленным параметрам и т. п.

В статистике в настоящее время имеется большое число критериев для проверки практически любых статистических гипотез: Колмогорова, Смирнова, Колмогорова – Смирнова, Фишера, Бартлета, Стьюдента, Пирсона (χ^2 – хи квадрат) и т. д. Для этих критериев в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы k построены таблицы критических точек.

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы k разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другое – при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Поскольку критерий K – одномерная случайная величина, все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами и, следовательно, существуют точки, которые их разделяют.

Критическими точками $k_{\text{кр}}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

В зависимости от критерия различают одностороннюю и двустороннюю критические области.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – принимают.

При проверке нулевой гипотезы H_0 нужно: 1) выбрать критерий; 2) на основании выборки вычислить наблюдаемое значение критерия $k_{\text{набл}}$; 3) выбрать уровень значимости α, контролирующий допустимую вероятность ошибки первого рода; 4) по заданному уровню значимости α найти $k_{\text{кр}}$ критерия; 5) принять то или иное решение на основе сравнения наблюдаемого и критического значений критерия.

Остановимся только на критерии Пирсона χ^2 как наиболее часто применяемом в инженерных расчетах.

Схема применения критерия χ^2 для проверки гипотезы H_0 о законе распределения изучаемой случайной величины ξ заключается в следующем:

– рассматриваем гипотезу H_0 о законе распределения случайной величины ξ (дискретной или непрерывной);

– по выборке объема n и формулам (6.1)–(6.6) находим оценки $\overline{x}$ и s^2 неизвестных параметров предполагаемого закона распределения;

– определяем частоты $m_i, i = \overline{1, k}$, с которыми встречаются в выборке каждое значение дискретной случайной величины или элементы выборки непрерывной случайной величины, принадлежащие каждому из заданных интервалов;

– находим теоретические вероятности $p_i = P(\xi = x_i)$ $p_i = P(\xi = x_i)$ – для дискретной СВ или $p_i = P(x_i < \xi \le x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$ – для непрерывной СВ. В частности, для нормального закона распределения имеем

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}}{s}\right); \qquad (6.13)$$

– вычисляем наблюдаемое значение критерия χ^2:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}; \qquad (6.14)$$

– контроль вычислений осуществляется равенством

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i^2}{np_i} - n = \chi^2_{\text{набл}}; \qquad (6.15)$$

– принимаем статистическое решение: гипотеза H_0 не противоречит выборке наблюдений на данном уровне значимости α, если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\alpha,\nu}$, где $\nu = k - l - 1$ – число степеней свободы, а l – число параметров предполагаемого закона распределения, $\chi^2_{\alpha,\nu}$ находится из прил. 3.

Если же $\chi^2_{\text{набл}} \ge \chi^2_{\alpha,\nu}$, то гипотеза H_0 отклоняется и может быть выдвинута другая гипотеза, которая проверяется по той же схеме.

ПРИМЕР 11. Даны результаты измерения диаметров бревен, которые поступают на распиловку деревообрабатывающего предприятия.

36	39	43	45	26	34	50	33	36	57
29	40	31	34	17	47	39	35	41	28
25	30	39	36	49	42	24	27	20	52
36	33	18	32	56	37	40	29	31	46
38	19	28	33	42	26	35	37	34	48
44	22	36	49	30	27	40	32	41	43
45	38	24	37	46	36	29	25	39	52
50	21	38	34	41	47	29	31	28	35
44	55	39	30	27	32	34	40	54	36
25	53	45	33	43	37	26	42	28	51

Необходимо:

а) построить интервальный статистический ряд;

б) построить гистограмму относительных частот;

в) найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

г) вычислить выборочное среднее значение $\overline{x}$ и несмещенную оценку дисперсии s^2;

д) определить гипотетическую плотность закона распределения. Проверить гипотезу о нормальном законе распределения;

е) найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$.

Решение.

а) Поскольку объем выборки достаточно большой: $n = 100$, то строим интервальный статистический ряд. Число интервалов вычисляем по формуле Стерджесса $k = 1 + 3,2\lg n$:

$$k = 1 + 3,2\lg 100 = 1 + 6,4 = 7,4.$$

Поскольку число интервалов есть целое число, то принимаем $k = 7$. Размах выборки $W = 57 - 17 = 40$.

Длина интервала $h = \dfrac{40}{7} \approx 5,714$. Для удобства вычислений принимаем $h = 6$.

Находим количество элементов выборки в каждом интервале и строим интервальный статистический ряд с учетом высот, нужных для построения гистограммы относительных частот.

Интервалы $[x_i; x_{i+1})$	[17–23)	[23–29)	[29 –35)	[35–41)	[41–47)	[47–53)	[53–59]
Середина интервала x_i^*	20	26	32	38	44	50	56
Частота m_i	6	15	22	26	16	10	5
Относительная частота $\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$	0,06	0,15	0,22	0,26	0,16	0,1	0,05
Высота $\dfrac{m_i}{hn}$	0,01	0,025	0,037	0,043	0,027	0,017	0,008

б) Гистограмма относительных частот приведена на рис. 6.7.

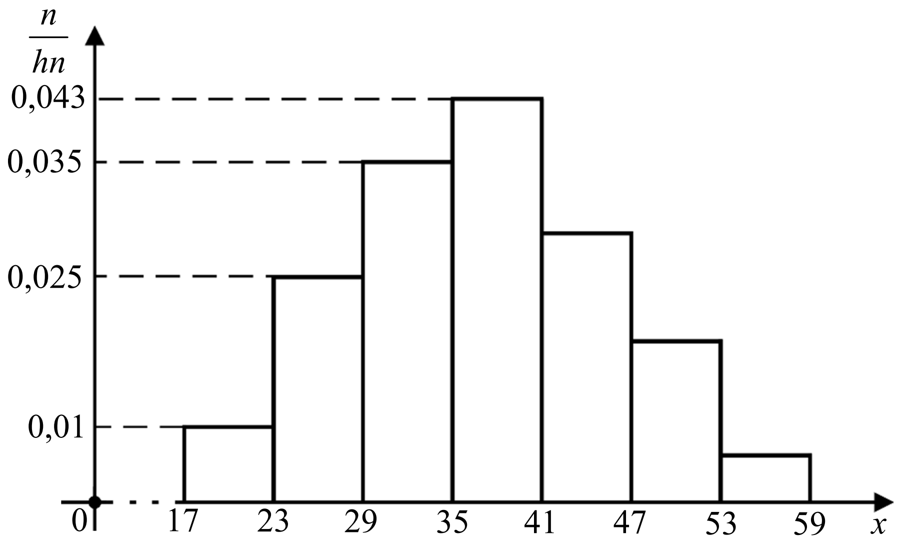


Рис. 6.7. Гистограмма относительных частот примера 11

в) Записываем эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$. Значение данной функции увеличивается на значение относительной частоты ω_i при переходе значения x через x_i^*.

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 20, \\ 0,06, & \text{если} \quad 20 < x \le 26, \\ 0,21, & \text{если} \quad 26 < x \le 32, \\ 0,43, & \text{если} \quad 32 < x \le 38, \\ 0,69, & \text{если} \quad 38 < x \le 44, \\ 0,85, & \text{если} \quad 44 < x \le 50, \\ 0,95, & \text{если} \quad 50 < x \le 56, \\ 1, & \text{если} \quad x > 56. \end{cases}$$

Строим график эмпирической функции распределения (рис. 6.8).

г) Находим точечную оценку математического ожидания по формуле (6.2):

$$\overline{x}=\frac{1}{100}(20\cdot 6+26\cdot 15+32\cdot 22+38\cdot 26+44\cdot 16+50\cdot 10+56\cdot 5)=$$

$$=\frac{3686}{100}=36,86$$

и несмещенную оценку дисперсии – по формуле (6.7):

$$s^2 = (16{,}86^2 \cdot 6 + 10{,}86^2 \cdot 15 + 4{,}86^2 \cdot 22 + 1{,}14^2 \cdot 26 + 7{,}14^2 \cdot 16 +$$
$$+ 7{,}14^2 \cdot 16 + 13{,}14^2 \cdot 10 + 19{,}14^2 \cdot 5) = \frac{8402{,}04}{99} = 84{,}87.$$

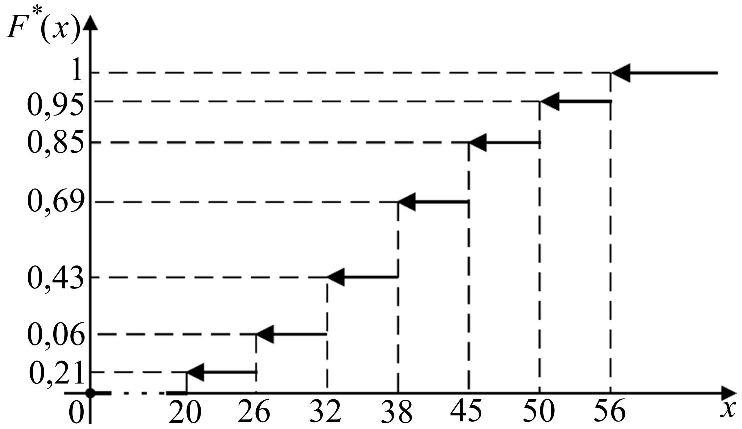


Рис. 6.8. График эмпирической функции распределения примера 11

Тогда $s = \sqrt{84{,}87} = 9{,}2.$

д) По виду гистограммы выдвигаем гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины. Данный закон содержит два параметра $M(\xi) = a,\, D(\xi) = \sigma^2(\xi)$. Функция плотности распределения вероятностей соответствующего нормального закона распределения имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{9{,}2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-36{,}86)^2}{2\cdot(9{,}2)^2}},$$

где вместо параметров распределения генеральной совокупности стоят их оценки.

С помощью критерия χ^2(Пирсона) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверяем гипотезу о нормальном законе распределения. Для этого по формуле (6.13) вычисляем вероятности p_i, с которыми случайная величина попадает в соответствующий интервал. Значения интегральной функции Лапласа находим в прил. 2.

$$p_1 = P(-\infty < \xi < 23) = \Phi\left(\frac{23 - 36{,}86}{9{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 36{,}86}{9{,}2}\right) =$$
$$= \Phi(+\infty) - \Phi(1{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668;$$
$$p_2 = P(23 < \xi < 29) = \Phi\left(\frac{29 - 36{,}86}{9{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{23 - 36{,}86}{9{,}2}\right) =$$

$$=\Phi(1,5)-\Phi(0,85)=0,4332-0,3023=0,1309;$$

$$p_3=P(29<\xi<35)=\Phi\left(\frac{35-36,86}{9,2}\right)-\Phi\left(\frac{29-36,86}{9,2}\right)=$$

$$=\Phi(0,85)-\Phi(0,20)=0,3023-0,0793=0,2230;$$

$$p_4=P(35<\xi<41)=\Phi\left(\frac{41-36,86}{9,2}\right)-\Phi\left(\frac{35-36,86}{9,2}\right)=$$

$$=\Phi(0,45)-\Phi(0,20)=0,1736+0,0793=0,2529;$$

$$p_5=P(41<\xi<47)=\Phi\left(\frac{47-36,86}{9,2}\right)-\Phi\left(\frac{41-36,86}{9,2}\right)=$$

$$=\Phi(1,10)-\Phi(0,45)=0,3643+0,1736=0,1907;$$

$$p_6=P(47<\xi<53)=\Phi\left(\frac{63-36,86}{9,2}\right)-\Phi\left(\frac{47-36,86}{9,2}\right)=$$

$$=\Phi(1,75)-\Phi(1,10)=0,4591-0,3643=0,0948;$$

$$p_7=P(53<\xi<+\infty)=\Phi\left(\frac{+\infty-36,86}{9,2}\right)-\Phi\left(\frac{53-36,86}{9,2}\right)=$$

$$=\Phi(+\infty)-\Phi(1,75)=0,5-0,4591=0,0409.$$

Все вычисления заносим в таблицу.

Интервал	m_i	p_i	np_i	m_i-np_i	$(m_i-np_i)^2$	$\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$	$\frac{m_i^2}{np}$
$[-\infty; 23)$	6	0,0668	6,68	−0,68	0,4624	0,0692	5,3892
[23; 29)	15	0,1309	13,09	1,91	3,6481	0,2787	17,1887
[29; 35)	22	0,2230	22,30	0,30	0,0900	0,0040	21,7040
[35; 41)	26	0,2529	25,29	0,71	0,5041	0,0199	26,7299
[41; 47)	16	0,1907	19,07	3,07	9,4249	0,4942	13,4242
[47; 53)	10	0,0948	9,48	0,52	0,2704	0,0285	10,5485
$[53; +\infty)$	5	0,0409	4,09	0,91	0,8281	0,2025	6,1125
–	–	$\sum p_i=1$	–	–	$\chi^2_{\text{набл}}=1,0971$		101,0971

Вычисляем выборочное значение статистики критерия χ^2 по формуле (6.14). Выполняем контроль вычислений по равенству (6.15). Так как $\chi^2_{\text{набл}}=101,0971-100=1,0971$, то вычисления выполнены правильно.

Вычислим критическое значение критерия χ^2. Нормальный закон распределения содержит два параметра $M(\xi)=a$, $D(\xi)=\sigma^2(\xi)$, поэтому число параметров распределения $l=2$. Количество интервалов статистического ряда $k=7$. Число степеней свободы будет $\nu=k-l-1=7-2-1=4$.

Для уровня значимости $\alpha=0,05$ и числа степеней свободы $\nu=4$ из прил. 4 находим $k_{\text{кр}}=\chi^2_{0,05;4}=9,5$.

Таким образом, $\chi^2_{\text{набл}}<k_{\text{кр}}$, поэтому нет оснований отвергать гипотезу о нормальном законе распределения диаметров бревен с параметрами $M(\xi)=36,86, \sigma(\xi)=9,2$.

е) Определяем доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии по формуле (6.12) с уровнем значимости $a=0,05$. Число степеней свободы будет $\nu=n-1=99$. По прил. 3 находим $t_{\alpha;\nu}=t_{0,05;99}=1,98$. По формуле (6.12) запишем доверительный интервал:

$$\left(36,86-1,98\frac{9,2}{\sqrt{100}};36,86+1,98\frac{9,2}{\sqrt{100}}\right)=(35,04;38,68).$$

6.8. Сглаживание экспериментальных зависимостей по методу наименьших квадратов

В физике, химии и других прикладных науках при обработке результатов наблюдений часто встречаются со следующей задачей: экспериментально получен ряд парных значений

$$(x_i;y_i), i=\overline{1,n}. \tag{6.16}$$

Требуется по полученным данным найти аналитическое выражение зависимости между x и y. Зависимость, полученная по результатам опытных данных, называется ***эмпирической***.

Задача отыскания эмпирической зависимости известна как задача ***сглаживания эмпирических данных.***

Задача получения эмпирической зависимости состоит из двух этапов:

1) определение вида зависимости (выбор класса функций, которому должна принадлежать искомая зависимость);

2) определение параметров эмпирической зависимости.

Определение вида зависимости может быть произведено на основе теоретических представлений о характере изучаемой зависимости или же путем сравнения кривой, построенной по данным наблюдения, с образцами известных кривых. Например, расположение экспериментальных точек на плоскости может навести на мысль о линейной, или экспоненциальной, или какой-либо другой зависимости. Однако общего метода для нахождения наилучшего типа эмпирической формулы, соответствующей опытным данным, указать нельзя.

После того как определен класс, которому должна принадлежать функция, встает вопрос о выборе конкретной функции этого класса. Как правило, все функции класса можно описать в виде функции, зависящей от x и нескольких числовых параметров $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$y = f(x, a_1, a_2, ..., a_k). \tag{6.17}$$

Одним из основных методов определения параметров эмпирической зависимости является метод наименьших квадратов. Он не решает вопрос о выборе вида аналитической зависимости, а только дает возможность определить значения параметров для выбранной зависимости.

Сущность метода наименьших квадратов заключается в том, что параметры зависимости (6.17) находятся по экспериментальным данным (6.16) из условия ***минимума суммы квадратов отклонений экспериментальных точек от сглаживающей кривой.***

После выбора вида зависимости параметры $a_1, a_2, ..., a_k$ находим из условия минимума суммы квадратов отклонений:

$$S(a_1, a_2, ..., a_k) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i, a_1, a_2, ..., a_k) - y_i)^2 \to \min.$$

Выражение $S(a_1, a_2, ..., a_k)$ можно рассматривать как функцию параметров $a_1, a_2, ..., a_k$. Если функция $S(a_1, a_2, ..., a_k)$ является непрерывной и дифференцируемой по параметрам, то в точке минимума частные производные должны равняться нулю, т. е. искомые значения параметров должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, ..., \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0. \tag{6.18}$$

Известно, что если зависимость (6.17) является многочленом степени k, то функция $S(a_1, a_2, ..., a_k)$ имеет одну точку экстремума, в которой достигается минимум. В этом случае искомые значения $a_1, a_2, ..., a_k$ представляют собой решение системы линейных уравнений.

Отметим частный случай, наиболее часто встречающийся на практике – случай линейной зависимости $y = ax + b$.

Тогда

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

и система уравнений для нахождения параметров a и b имеет вид

$$\begin{cases} nb + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \tag{6.19}$$

ПРИМЕР 12. Найти эмпирическую зависимость времени валки дерева от его диаметра по результатам десяти испытаний, приведенных ниже.

d, см	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42
t, с	49	53	54	56	61	62	65	69	72	76

Решение. Для удобства пользования формулой (6.19) обозначим $y = t$, а $x = d$. На плоскости Oxy построим точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,10}$.

Из точечной диаграммы (рис. 6.9) видно, что точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,10}$ группируются возле некоторой прямой линии, поэтому можно считать, что зависимость y от x будет линейной, т. е. имеет вид $y = ax + b$. Для упрощения записи системы (6.19) составим вспомогательную таблицу.

Номер испытания	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	24	49	576	1 176
2	26	53	676	1 378
3	28	54	784	1 512
4	30	56	900	1 680
5	32	61	1 024	1 952
6	34	62	1 156	2 108
7	36	65	1 296	2 340

8	38	69	1 444	2 622
9	40	72	1 600	2 880
10	42	76	1 764	3 192
Σ	330	617	11 220	20 840

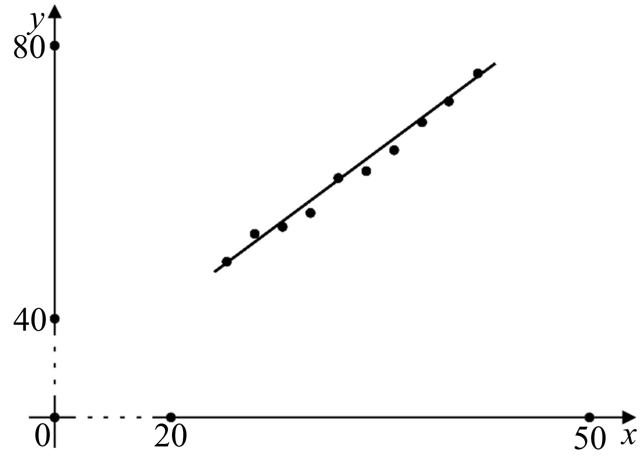


Рис. 6.9. Точечная диаграмма и график эмпирической зависимости

Система (6.19) для нашего примера имеет вид

$$\begin{cases} 10b + 330a = 617, \\ 330b + 11\,220a = 20\,840. \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем: $a \approx 1{,}45; b \approx 13{,}8.$ Уравнение сглаживающей функции будет $y = 1{,}45x + 13{,}1.$ На рис. 6.9 построен график полученной прямой. Точечная диаграмма и график эмпирической зависимости подтверждают их соответствие.

Эмпирическая зависимость времени валки дерева от его диаметра записывается функцией $t = 1{,}45d + 13{,}8.$

Замечание. На практике уравнение эмпирической зависимости проще всего получить с помощью линии тренда в Microsoft Excel.

6.9. Элементы теории корреляционного и регрессионного анализа

Корреляционный анализ исследует взаимосвязь случайных величин (СВ) на основе экспериментальных данных. Взаимосвязь между этими переменными оценивается с помощью ***коэффициента корреляции***, известного как ***коэффициент Пирсона.***

Предположим, что результаты эксперимента описываются двумя случайными величинами. Эти случайные величины могут быть связаны функциональной зависимостью, либо зависимостью другого рода, называемой статистической, либо быть независимыми.

Строгая функциональная зависимость реализуется редко, так как обе величины или одна из них подвержены действию случайных факторов, причем среди них могут быть и общие (факторы, которые действуют на обе случайные величины). Тогда возникает статистическая зависимость. Например, мы знаем, что существует зависимость между ростом и весом человека. Однако, зная рост человека, мы не можем однозначно указать его вес и наоборот.

В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой; в этом случае статистическую зависимость называют ***корреляционной***.

Статистической называется зависимость, при которой изменение одной величины влечет изменение распределения другой. Рассмотрим двумерную СВ (ξ,η). Пусть возможные значения для составляющей ξ будут $x_1, x_2, \ldots, x_k$, для составляющей η – $y_1, y_2, \ldots, y_l$.

Для определения статистической зависимости данные наблюдений СВ (ξ,η) записывают в виде корреляционной табл. 6.6.

Таблица 6.6

Корреляционная таблица

ξ	η				
	y_1	y_2	$\cdots$	y_l	n_i
x_1	m_{11}	m_{12}	$\cdots$	m_{1l}	n_1
x_2	m_{21}	m_{22}		m_{2l}	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	m_{k1}	m_{k2}	$\cdots$	m_{kl}	n_k
m_j	m_1	m_2	$\cdots$	m_l	n

В ней

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} m_{ij} = n;\ \sum_{j=1}^{l} m_{i\,j} = n_i,\ i=\overline{1,k};\ \sum_{i=1}^{k} m_{ij} = m_j,\ j=\overline{1,l}.$$

Здесь m_{ij} означает, что пара значений (x_i, y_j) наблюдалось m_{ij} раз; n_i – соответствующие частоты наблюдаемых значений x_i, $i=\overline{1,k}$; m_j – соответствующие частоты наблюдаемых значений y_j, $j=\overline{1,l}$.

В случае, когда число наблюдаемых значений СВ ξ и η велико или СВ являются непрерывными (т. е. могут принимать любое значение из соответствующих интервалов), аналогично интервальному статистическому ряду составляется интервальная корреляционная таблица.

Условным средним $\overline{y}_x$ называют среднее арифметическое значений СВ η, соответствующих значению $\xi = x$.

Например, $\overline{y}_{x_2}$ будет

$$\overline{y}_{x_2} = \frac{m_{21}y_1 + m_{22}y_2 + \ldots + m_{2l}y_l}{n_2}. \qquad (6.20)$$

Корреляционной зависимостью η от ξ называют зависимость условной средней $\overline{y}_x$ от x:

$$\overline{y}_x = f(x). \qquad (6.21)$$

Уравнение (6.21) называют ***уравнением регрессии*** η на ξ; функцию $f(x)$ называют ***эмпирической регрессией*** η на ξ, а ее график – ***линией регрессии*** η на ξ.

Аналогично определяются условная средняя $\overline{x}_y$ и корреляционная зависимость ξ на η $\overline{x}_y = \varphi(y)$.

Предварительное представление о характере зависимости между η и ξ можно получить, если элементы выборки (x_i, y_j), $i = \overline{1,k}, j = \overline{1,l}$ отметить точками на плоскости в выбранной системе координат. Эта точечная диаграмма называется ***корреляционным полем*** (рис. 6.10).

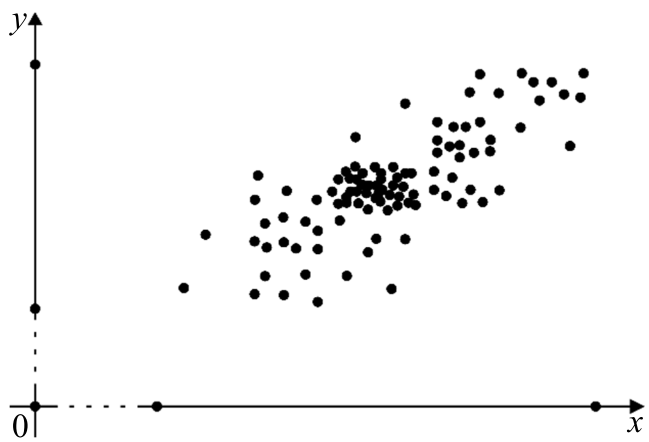


Рис. 6.10. Корреляционное поле

Распределения СВ η и ξ характеризуются числовыми параметрами: математическими ожиданиями компонент $M(\xi), M(\eta)$, дисперсиями $D(\xi)=\sigma^2(\xi), D(\eta)=\sigma^2(\eta)$, ***корреляционным моментом*** (ковариацией) $k_{\xi\eta}=M\left((\xi-M(\xi))(\eta-M(\eta))\right)$, ***коэффициентом корреляции*** $r_{\xi\eta}=\dfrac{k_{\xi\eta}}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}, \left|r_{\xi\eta}\right|\le 1.$

Корреляционный момент $k_{\xi\eta}$ имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин, т. е. он зависит от единиц измерения величин, что затрудняет его использование для оценки тесноты взаимосвязи между СВ η и ξ. Поэтому был введен безразмерный *коэффициент корреляции Пирсона* – $r_{\xi\eta}$. Коэффициент корреляции изменяется в пределах от (–1) до (+1), не зависит от единиц измерения и служит для оценки тесноты взаимосвязи между СВ η и ξ

Чем ближе значение $r_{\xi\eta}$ к (+1) или (–1), тем сильнее взаимосвязь между СВ η и ξ, чем меньше значение $r_{\xi\eta}$ – тем взаимосвязь слабее.

На практике наиболее часто функции регрессии оказываются линейными, тогда корреляцию называют ***линейной***; в противном случае – ***нелинейной***. Очевидно, что при линейной корреляции обе линии регрессии являются прямыми линиями.

Остановимся только на линейной корреляции. Тесноту линейной взаимосвязи между СВ η и ξ характеризует выборочный коэффициент корреляции Пирсона $r_{\xi\eta}$:

– если $\left|r_{\xi\eta}\right|=1$, то элементы выборки $(x_i, y_j), i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,l}$ лежат на прямой линии, а ξ и η считаются практически линейно зависимыми. Чем ближе $\left|r_{\xi\eta}\right|$ к 1, тем связь сильнее; чем ближе $\left|r_{\xi\eta}\right|$ к 0, тем связь слабее;

– если $r_{\xi\eta}=0$, то это означает отсутствие линейной корреляции, но не обязательно взаимосвязи (может быть нелинейная зависимость);

– если η и ξ независимы, то – $r_{\xi\eta}=0$.

Здесь и дальше будем считать, что СВ η и ξ распределены по *нормальному закону распределения*, тогда эмпирические функции линейной регрессии η на ξ и ξ на η задаются уравнениями

$$\overline{y}_x-\overline{y}=r_{\xi\eta}\frac{s(\eta)}{s(\xi)}(x-\overline{x});\ \overline{x}_y-\overline{x}=r_{\xi\eta}\frac{s(\xi)}{s(\eta)}(y-\overline{y}). \qquad (6.22)$$

По корреляционной таблице находятся оценки параметров линейной регрессии:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} y_j m_j; \tag{6.23}$$

$$s^2(\xi) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 n_i = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \frac{n}{n-1}(\overline{x})^2; \tag{6.24}$$

$$s^2(\eta) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{l}(y_i - \overline{y})^2 m_j = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{l} y_i^2 m_j - \frac{n}{n-1}(\overline{y})^2; \tag{6.25}$$

$$k_{\xi\eta} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{л}\sum_{j=1}^{l}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})m_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x_i y_j m_{ij} - \tag{6.26}$$

$$-\frac{n}{n-1}\overline{x}\cdot\overline{y};$$

$$r_{\xi\eta} = \frac{k_{\xi\eta}}{s(\xi)s(\eta)}. \tag{6.27}$$

Замечание 1. Если построить на одном корреляционном поле две линии линейной регрессии η на ξ и ξ на η, то они пересекутся в точке $O(\overline{x}, \overline{y})$ и угол между этими прямыми тем меньше, чем ближе коэффициент корреляции к ± 1.

Замечание 2. В случае, когда данные наблюдений СВ η и ξ записаны в виде интервальной корреляционной таблицы, в формулах (6.23)–(6.26) вместо x_i и y_j берут середины соответствующих интервалов.

Для проверки при заданном уровне значимости α нулевой гипотезы $H_0: r_{\xi\eta} = 0$ – отсутствует линейная связь между нормально распределенными составляющими СВ η и ξ при конкурирующей гипотезе $H_1: r_{\xi\eta} \neq 0$ вычисляется наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}} = \frac{|r_{\xi\eta}|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_{\xi\eta}^{\ 2}}}$$

и по таблице для критических точек распределения Стьюдента (прил. 3) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 2$ находится $t_{\text{табл}} = t_{\alpha, n-2}$. Затем сравнивается наблюдаемое значение критерия с табличным. Если $t_{\text{набл}} \geq t_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 о некоррелированности составляющих η и ξ отвергается. Если же $t_{набл} < t_{табл}$, то нет основания отвергать нулевую H_0 гипотезу о некоррелированности случайных величин η и ξ.

ПРИМЕР 13. Результаты зависимости температуры смазки в двигателе грузовой автомашины y (град) от скорости движения x (км/час) записаны ниже

x_i	y_j					
	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	n_i
15–25	1	1	–	–	–	2
25–35	5	9	4	–	–	18
35–5	2	4	40	1	1	48
45–55	–	–	8	12	3	23
55–65	-	–	–	2	7	9
m_j	8	14	52	15	11	$n=100$

Требуется:

1. Построить корреляционное поле.
2. Определить средние выборочные значения $\overline{x}, \overline{y}$.
3. Определить несмещенные оценки дисперсий $s(x), s(y)$.
4. Вычислить коэффициент корреляции r_{xy}.
5. Найти эмпирические линейные функции регрессии Y на X и X на Y. На плоскости Oxy изобразить эти прямые.
6. Проверить соответствие линейной регрессии с результатами наблюдений при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение. Построим корреляционное поле (рис. 6.11).

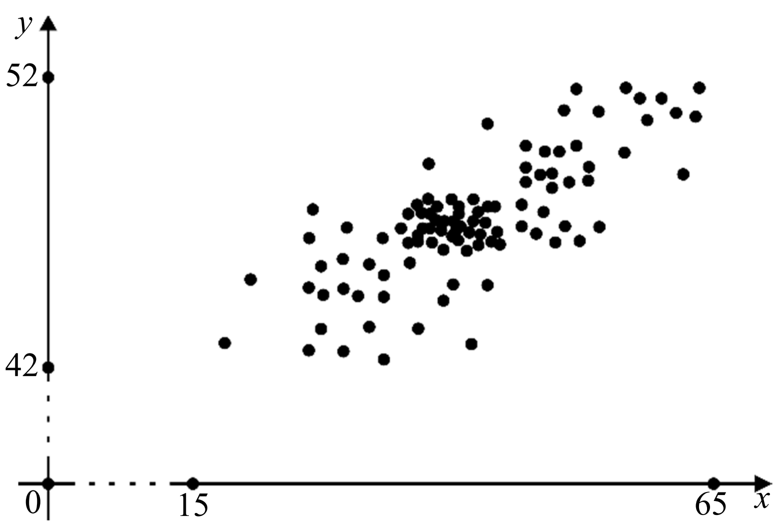


Рис. 6.11. Корреляционное поле примера 13

Находим середины интервалов группировки статистических данных и записываем их в таблицу

x_i	y_j					
	43	45	47	49	51	n_i
20	1	1	–	–	–	2
30	5	9	4	–	–	18
40	2	4	40	1	1	48
50	–	–	8	12	3	23
60	–	–	–	2	7	9
m_j	8	14	52	15	11	$n=100$

Вычисляем выборочные средние значения:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i n_j=\frac{1}{100}(20\cdot 2+30\cdot 18+40\cdot 48+50\cdot 23+60\cdot 9)=41{,}9;$$

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l}y_j m_j=\frac{1}{100}(43\cdot 8+45\cdot 14+47\cdot 52+49\cdot 15+51\cdot 11)=47{,}14.$$

Вычисляем несмещенные оценки дисперсии:

$$s^2(x)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}x_i^2 n_i-\frac{n}{n-1}\overline{x}^2=\frac{1}{99}(400\cdot 2+900\cdot 18+1600\cdot 48+$$

$$+2500\cdot 23+3600\cdot 9)-\frac{100}{99}(41{,}9)^2=82{,}21;\quad s(x)=9{,}067;$$

$$s^2(y)=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{l}y_i^2 m_j-\frac{n}{n-1}\overline{y}^2=\frac{1}{99}(1849\cdot 8+\cdots+$$

$$+2601\cdot 11)-\frac{100}{99}(47{,}14)^2=4{,}223;$$

$$s(y)=2{,}055.$$

Корреляционный момент

$$k_{xy}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}x_i y_j m_{ij}-\frac{n}{n-1}\,\overline{x}\cdot\overline{y}=\frac{1}{99}(20\cdot 43\cdot 1+\cdots+60\cdot 51\cdot 7)-$$

$$-\frac{100}{99}\cdot 41{,}9\cdot 47{,}14=14{,}882.$$

Коэффициент корреляции будет

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{s(x)s(y)} = 0{,}8.$$

Запишем эмпирические линейные функции регрессии y на x и x на y:

$$\overline{y}_x - 47{,}14 = 0{,}8 \cdot \frac{2{,}055}{9{,}067}(x - 41{,}9); \;\; \overline{y}_x = 0{,}181x + 39{,}55;$$

$$\overline{x}_y - 41{,}9 = 0{,}8 \cdot \frac{9{,}067}{2{,}055}(y - 47{,}14); \;\; \overline{x}_y = 3{,}5245y - 124.$$

Изобразим эти прямые на рис. 6.12.

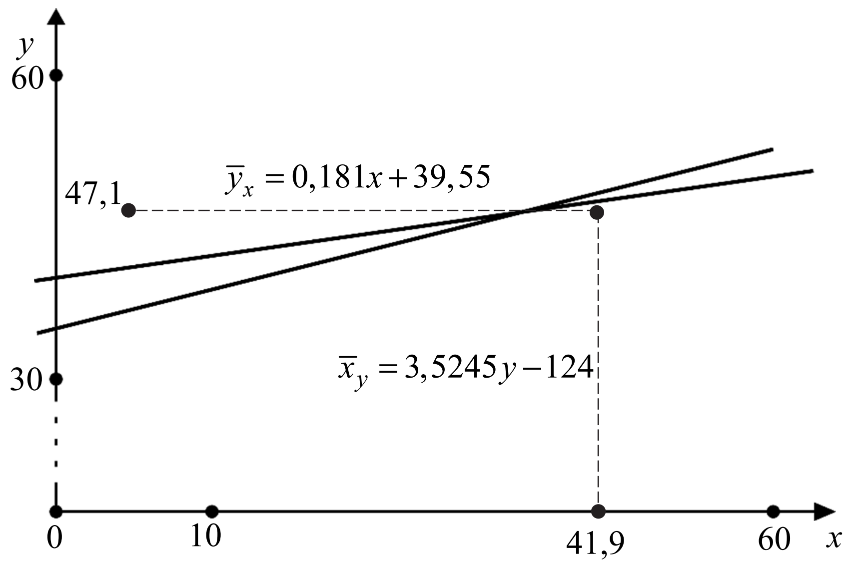


Рис. 6.12. Графики линейных функций регрессий

Точка пересечения графиков имеет координаты $x = \overline{x} = 41{,}9$; $y = \overline{y} = 47{,}14$, следовательно, вычисления выполнены правильно.

Проверяем соответствие линейной регрессии результатам наблюдения:

$$t_{\text{набл}} = \frac{|r_{xy}|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_{xy}^{\,2}}} = \frac{0{,}8\sqrt{98}}{\sqrt{1 - 0{,}64}} = 13{,}144.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ при степени свободы $\nu = n - 2 = 98$ по таблице распределения Стьюдента (прил. 3) находим $t_{\alpha;\nu} = t_{0{,}05;98} = 1{,}98$.

Так как $t_{набл} > t_{табл}$, то линейная модель зависимости между случайными величинами принимается.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка: 5,7,13,11,5,9,11,11,9,5,7,9,7,7,11,9,7,11,7,9,9,13,9,11,9,11,5,9,13,9.

Необходимо записать:

а) сгруппированный статистический ряд;

б) статистический закон распределения.

2. Из генеральной совокупности извлечена выборка: 14,16,22,20,14,18,20,20,18,14,16,18,20,16,16,20,18,22,16,20,16,18,18, 22,18, 20,18,20,14,22.

Необходимо записать:

а) сгруппированный статистический ряд;

б) статистический закон распределения.

3. По выборке 39, 41, 40,40, 43, 41, 44, 42, 41, 41, 43, 42, 39, 40, 42, 43, 41, 42, 41, 39 требуется записать:

а) вариационный ряд;

б) статистический ряд распределения;

в) статистический закон распределения;

г) построить полигон частот;

д) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

4. По выборке, представленной статистическим рядом

x_i	2	5	7	8
m_i	1	3	2	4

а) записать статистический закон распределения;

б) построить полигон частот;

в) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

5. По данным интервального статистического ряда СВ ξ

Границы интервалов	17–23	23–29	29–35	35–41	41–47	47–53	53–59
Частота m_i	6	15	22	26	16	10	5

требуется:

а) записать статистический закон распределения выборки СВ ξ;

б) записать эмпирическую функцию распределения и построить е график;

в) построить гистограмму относительных частот;

г) по виду гистограммы определить гипотетический закон распределения СВ ξ.

6. Результаты исследования предела прочности на сжатие 200 образцов ДВП представлены в виде интервального статистического ряда СВ ξ – предел прочности на сжатие.

Границы интервалов	19–21	21–23	23–25	25–27	27–29	29–31
Частота m_i	10	26	56	64	30	14

Требуется:

а) записать статистический закон распределения СВ ξ;

б) записать эмпирическую функцию распределения;

в) по виду гистограммы определить гипотетический закона распределения СВ ξ.

7. По выборке, заданной статистическим рядом

x_i	2	5	7	10
m_i	16	12	8	14

найти оценку генеральной средней.

8. По выборке, заданной статистическим рядом

x_i	1	2	3	4
m_i	20	15	10	5

найти выборочную среднюю $\overline{x}$ и выборочную дисперсию $D_в$.

9. По выборке объема $n = 41$ найдена смещенная оценка $D_в = 3$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку генеральной дисперсии.

10. В итоге пяти измерений длины стержня (без систематических ошибок) получены следующие результаты: $x_1 = 92$; $x_2 = 94$; $x_3 = 103$; $x_4 = 105$; $x_5 = 106$.

Найти:

а) выборочную среднюю длину стержня;

б) выборочную и исправленную дисперсии ошибки прибора.

11. После шести заездов автомобиля были получены следующие значения его максимальной скорости (м/с): 27, 38, 30, 37, 35, 31. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии максимальной скорости автомобиля.

12. Ниже приведены результаты измерения роста (в сантиметрах) случайно отобранных 100 студентов.

Рост	154–158	158–162	162–165	165–170	170–174	174–178	178–182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

13. По данным интервального статистического ряда найти выборочное среднее и несмещенную оценку дисперсии s^2.

Границы интервалов	17–23	23–29	29–35	35–41	41–47	47–53	53–59
Частота m_i	6	15	22	26	16	10	5

14. Для определения точности измерительного прибора, систематическая ошибка которого равна нулю, было произведено пять независимых измерений, результаты которых представлены ниже.

Номер измерения	1	2	3	4	5
x_i	2781	2836	2807	2858	2763

Найти выборочное среднее и несмещенную оценку дисперсии s^2.

15. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенной СВ с заданной надежностью $\gamma = 0,95$, если среднеквадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 2$ и по выборке объема 10 найдено выборочное среднее, равное 5,4.

16. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,95$ неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака ξ генеральной совокупности, если среднеквадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 5$, выборочная средняя $\overline{x} = 14$ и объем выборки $n = 25$.

17. Произведено 6 измерений расстояний до объекта одним прибором со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 40$ м. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния до объекта с надежностью $\gamma = 0,95$, зная среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 2000$ м.

18. Среднее значение расстояния до ориентира по четырем независимым измерениям равно 2250 м, среднеквадратическая ошибка измерительного прибора $\sigma = 40$ м, систематическая ошибка отсутствует. Найти с надежностью $\gamma = 0,95$ доверительный интервал для измеряемой величины, считая ошибку измерения нормально распределенной СВ.

19. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью $\gamma = 0,975$ точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней будет $\delta = 0,3$, если известно среднеквадратическое отклонение $\sigma = 1,2$ нормально распределенной генеральной совокупности.

20. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью $\gamma = 0,98$ точность оценки математического ожидания нормально распределенной СВ была равна 0,2, если среднеквадратическое отклонение этой СВ равно 4?

21. По результатам наблюдений, записанных в таблице, установить вид эмпирической зависимости y от x и методом наименьших квадратов найти ее уравнение.

x_i	1	2	3	4
y_i	2	4	5	7

22. При определения концентрации тех или иных веществ в растворе найти эмпирическое уравнение зависимости оптической плотности раствора от концентрации. Экспериментальные данные для определения концентрации записаны в следующей таблице.

Концентрация раствора, мг/кг	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
Оптическая плотность раствора	0,035	0,070	0,150	0,140	0,175

Установить вид эмпирической зависимости y от x и методом наименьших квадратов найти ее уравнение.

23. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую зависимость между коэффициентом пары шпон – сталь по результатам испытаний, приведенных в таблице.

p_i, кг/см^2	1	2	3	4	5
f_i	0,15	0,17	0,20	0,21	0,24

24. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую зависимость между x и y по данным эксперимента.

x_i	0	0,693	1,097	1,386	1,609	1,791
y_i	3,453	3,325	3,246	3,186	3,144	3,114

25. Результаты зависимости температуры смазки в двигателе грузовой автомашины y (град) от скорости движения x(км/час) приведены ниже.

y_j	x_i					
	20	30	40	50	60	n_j
43	1	5	2	–	–	8
45	1	9	4	–	–	14
47	–	4	40	8	–	52
49	–	–	1	12	2	15
51	–	–	1	3	7	11
m_i	2	18	48	23	9	$n=100$

Необходимо:

а) найти $\overline{x}, \overline{y}$;

б) найти несмещенные оценки s_x и s_y;

в) вычислить коэффициент корреляции;

г) найти эмпирические линейные регрессии Y на X и X на Y;

д) проверить соответствие линейной регрессии результатам наблюдения при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

26. Исследовался прогиб доски y (миллиметры) в зависимости от нагрузки x (килограммы).

Найти:

а) средние значения прогиба и нагрузки $\overline{x}, \overline{y}$;

б) несмещенные оценки среднеквадратических отклонений s_x и s_y;

в) коэффициент корреляции между этими признаками;

г) записать уравнения регрессии $У$ на X и X на $У$; д) проверить соответствие линейной регрессии результатам наблюдения при уровне значимости $\alpha = 0,05$. Результаты экспериментов записаны в следующей таблице.

y_j	x_i					
	0,5–1,5	1,5–2,5	2,5–3,5	3,5–4,5	4,5–5,5	n_j
13,5–14,5	10	8	–	–	–	18
14,5–15,5	–	12	7	–	–	19
15,5–16,5	–	–	28	6	–	34
16,5–17,5	–	–	–	8	9	17
17,5–18,5	–	–	–	–	12	12
m_i	10	20	35	14	21	$n = 100$

Ответы

1. а)

x_i	5	7	9	11	13
m_i	4	6	10	7	3

б)

x_i	5	7	9	11	13
$\omega_i = \frac{m_i}{n}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{10}$

2. а)

x_i	14	16	18	20	22
m_i	4	6	8	8	4

б)

x_i	14	16	18	20	22
$\omega_i = \frac{m_i}{n}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

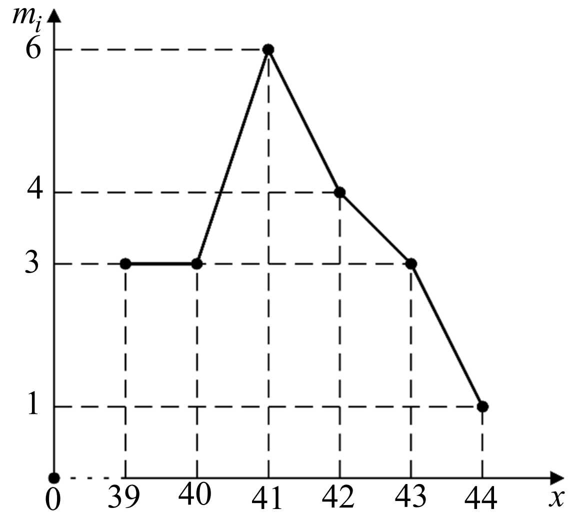
3. а) вариационный ряд 39, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 44;
б) статистический ряд распределения

x_i	39	40	41	42	43	44
m_i	3	3	6	4	3	1

в) статистический закон распределения выборки

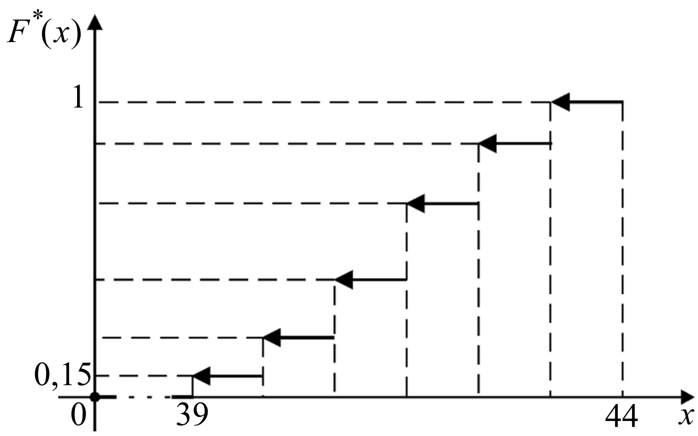
x_i	39	40	41	42	43	44
$\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$	0,15	0,15	0,3	0,2	0,15	0,05

г) полигон частот



д) эмпирическая функция распределения и ее график

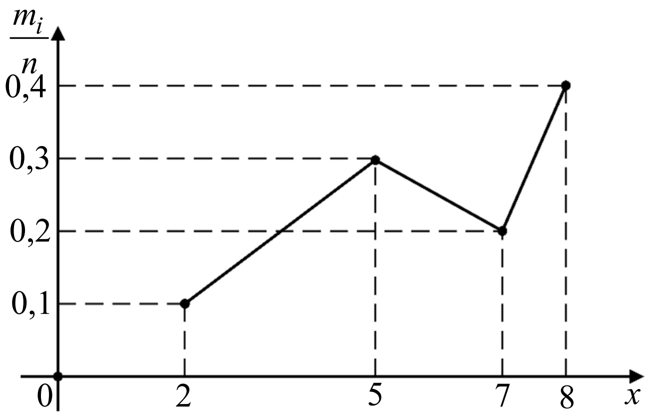
$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 39, \\ 0{,}15, & \text{если } 39 < x \le 40, \\ 0{,}3, & \text{если } 40 < x \le 41, \\ 0{,}6, & \text{если } 41 < x \le 42, \\ 0{,}8, & \text{если } 42 < x \le 43, \\ 0{,}95, & \text{если } 43 < x \le 44, \\ 1, & \text{если } x > 44. \end{cases}$$



4. а) статистический закон распределения выборки

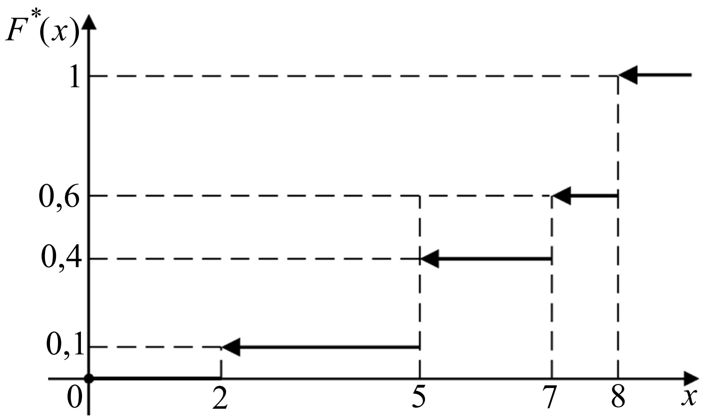
x_i	2	5	7	8
$\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$	0,1	0,3	0,2	0,4

б) полигон относительных частот



в) эмпирическая функция распределения и ее график

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 2,\\ 0{,}1, & \text{если} \quad 2<x\le 5,\\ 0{,}4, & \text{если} \quad 5<x\le 7,\\ 0{,}6, & \text{если} \quad 7<x\le 8,\\ 1, & \text{если} \quad x>8.\end{cases}$$

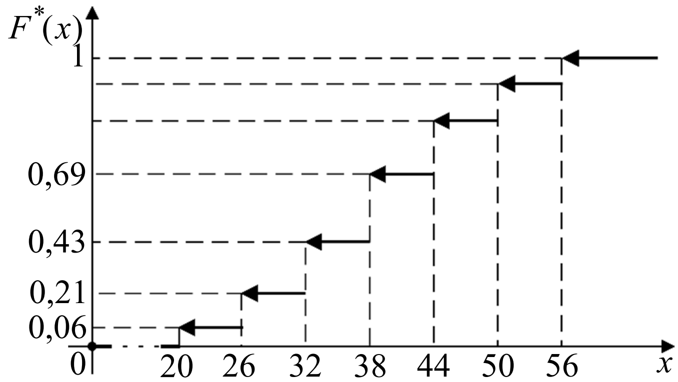


5. а) статистический закон распределения выборки

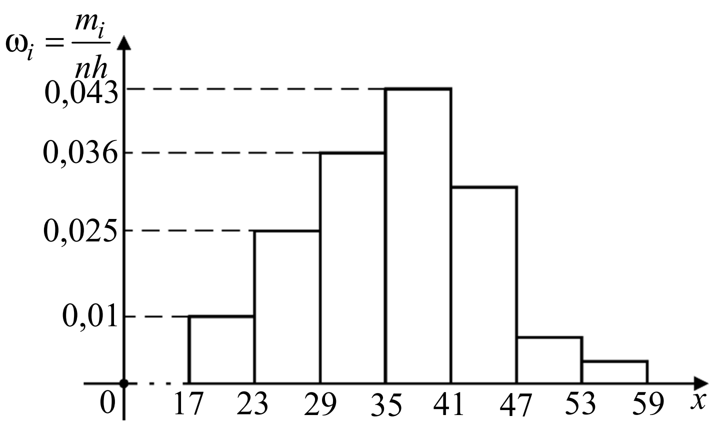
Границы интервалов	17–23	23–29	29–35	35–41	41–47	47–53	53–59
$\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$	0,06	0,15	0,22	0,26	0,16	0,10	0,05

б) эмпирическая функция распределения и ее график

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 20, \\ 0{,}06, & \text{если} \quad 20 < x \le 26, \\ 0{,}21 & \text{если} \quad 26 < x \le 32, \\ 0{,}43, & \text{если} \quad 32 < x \le 38, \\ 0{,}69, & \text{если} \quad 38 < x \le 44, \\ 0{,}85, & \text{если} \quad 44 < x \le 50, \\ 0{,}95, & \text{если} \quad 50 < x \le 56, \\ 1, & \text{если} \quad x > 56. \end{cases}$$



в) гистограмма относительных частот



г) по виду гистограммы можно выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения.

6. а) статистический закон распределение выборки

Границы интервалов	19–21	21–23	23–25	25–27	27–29	29–31
$\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$	0,05	0,13	0,28	0,32	0,15	0,07

б) эмпирическая функция распределения

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 20,\\ 0,05, & \text{если} \quad 20<x\le 22,\\ 0,18 & \text{если} \quad 22<x\le 24,\\ 0,46, & \text{если} \quad 24<x\le 26,\\ 0,78, & \text{если} \quad 26<x\le 28,\\ 0,93, & \text{если} \quad 28<x\le 30,\\ 1, & \text{если} \quad x>30.\end{cases}$$

в) по виду гистограммы можно выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения. **7.** $\overline{x}=5,76$. **8.** $\overline{x}=2$; $D_{\text{в}}=1$. **9.** $s^2=3,075$. **10.** $\overline{x}=$ $=100$; $D_{\text{в}}=34$; $s^2=18,8$ **11.** $\overline{v}=33; s^2=18,8$. **12.** $\overline{x}=166$; $D_{\text{в}}=33,44$. **13.** $\overline{x}=36,86$; $s^2=84,87$. **14.** $\overline{x}=2809; s^2=1508,5$. **15.** $(4,16; 6,64)$. **16.** $(12,04; 15,96)$. **17.** $(1968; 2032)$. **18.** $(2210,8;\ 2289,2)$. **19.** $n=81$. **20.** $n\ge 2172$. **21.** $y=1,6x+0,5$. **22.** $y=1,75x+0,009$. **23.** $f=0,22p+$ $+0,13$. **24.** $y=-0,192x+3,455$. **25.** а) $\overline{x}=41,9$; $\overline{y}=47,14$; б) $s_x=9,067$; $s_y=2,0549$; в) $r_{xy}=0,7987$; г) $\vec{y}_x=0,181x+39,556$; $\overline{x}_y=3,5242y-124,229$;

д) $t_{\text{набл}}=\dfrac{|r_{xy}|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^{\ 2}}}=\dfrac{0,798\sqrt{98}}{\sqrt{1-0,82}}=13,1397$. Для уровня значимости $\alpha=0,05$ при степени свободы $\nu=n-2=98$ по таблице (прил. 3) находим $t_{\alpha;\nu}=t_{0,05;98}=1,98$. Так как $t_{\text{набл}}>t_{\text{табл}}$, то линейная модель зависимости между случайными величинами принимается. **26.** а) $\overline{x}=3,16$; $\overline{y}=15,86$; б) $s_x=1,253; s_y=1,247$; в) $r_{xy}=r_{yx}=0,93$; г) $\vec{y}_x=0,925x+$ $+12,937$; $\overline{x}_y=0,934y-11,65$; д) $t_{\text{набл}}=\dfrac{|r_{xy}|\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^{\ 2}}}=\dfrac{0,93\sqrt{98}}{\sqrt{1-0,865}}=$ $=24,9$. Для уровня значимости $\alpha=0,05$ при степени свободы $\nu=n-2=98$ по таблице (прил. 3) находим $t_{\alpha;\nu}=t_{0,05;98}=1,98$. Так как $t_{\text{набл}}>t_{\text{табл}}$, то линейная модель зависимости между случайными величинами принимается.

Тема 7 | ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование – это раздел математики, в котором изучаются методы исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений некоторой линейной функции, на аргументы которой наложены линейные ограничения.

Слово «программирование» связано с тем, что решение задачи обычно определяет программу или план работы некоторого экономического субъекта.

Линейное программирование возникло под влиянием прикладных технико-экономических задач в 30–40-х гг. XX в. и благодаря трудам Л. В. Канторовича, Дж. Данцига, Дж. фон Неймана и многих других известных математиков.

Еще в 1939 г. советский математик Л. В. Канторович (родители из Беларуси: мать – минчанка, отец – из деревни Наднеман Узденского района) построил математическую модель «организации и планирования производства», которая по существу была первой линейно-программной моделью. В 1947 г. американский математик Данциг Джонсон сформулировал общую задачу линейного программирования и разработал метод ее решения (симплекс-метод).

Методы линейного программирования активно используются в прогнозных расчетах, планировании и организации производственных процессов, финансовой сфере, логистике, позволяя оптимизировать деятельность хозяйствующих субъектов при ограниченных ресурсах. Насколько важную роль играет линейное программирование при решении различных народнохозяйственных задач, говорит тот факт, что лауреатами Нобелевской премии 1975 г. по экономике за достижения в области «линейного программирования» и «исследования операций» стали Л. В. Канторович (совместно с Т. Купанском (Нидерланды)). Следует отметить, что Нобелевская премия в области математики не присуждается.

Рассмотрим некоторые типичные задачи лесопромышленного комплекса, решаемые методами линейного программирования (ЛП).

7.1. Задачи линейного программирования в лесной промышленности

1. Задача оптимального использования ресурсов. Задача заключается в составлении плана выпуска продукции для получения максимальной прибыли при ограниченных ресурсах, используемых для ее выпуска.

Например, у лесозаготовительного предприятия имеются m видов ресурсов $P_1, P_2, ..., P_m$ в количествах $b_1, b_2, ..., b_m$ соответственно. В качестве ресурсов можно рассматривать объем лесосечного фонда, запас горюче-смазочных материалов, наличие техники, трудовые и финансовые ресурсы и т. д.

С использованием имеющихся ресурсов, предприятие может производить n видов продукции: пиловочник хвойный – $П_1$, пиловочник лиственный – $П_2$, фанерный кряж – $П_3$, балансы – $П_n$. На производство единицы (1 м^3) сортимента $П_j$ необходимо затратить a_{ij} единиц ресурса P_i, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$. Единица j-го сортимента продается по цене q_j, а его себестоимость равна s_j. Тогда прибыль от реализации 1 м^3 j-го лесоматериала $c_j = q_j - s_j$, $j = \overline{1, n}$. Запишем все исходные данные в виде табл. 7.1.

Таблица 7.1

Данные о наличии и расходе ресурсов

Ресурсы, м^3	Продукция, м^3				Запасы ресурсов, м^3
	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	
P_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
P_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
:	…	…	…	…	…
P_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибыль от реализации 1 м^3 сортиментов	c_1	c_2	…	c_n	–

Составим математическую модель данной задачи. Объемы выпуска сортиментов $П_1, П_2, ..., П_n$ обозначим через $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно. Для нормальной работы предприятия необходимо, чтобы хватало имеющихся в распоряжении предприятия ресурсов. Другими словами, должны быть выполнены следующие ограничения по ресурсам:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (7.1)$$

Систему ограничений необходимо дополнить функцией цели. В нашем случае ею является прибыль от реализации готовой продукции:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max . \qquad (7.2)$$

Таким образом, исходная задача свелась к ЗЛП нахождения максимума линейной формы (7.2) при линейных ограничениях (7.1).

2. Задача оптимального раскроя материалов. В деревообрабатывающей промышленности одной из основных задач является задача оптимального раскроя листов фанеры, древесностружечных и древесноволокнистых плит, обивочных тканей, брусьев, досок и многих других материалов и изделий на заготовки нужных размеров и в нужном количестве при минимуме отходов. От ее решения зависит эффективность производства, которая применительно к конкретным условиям может оцениваться максимальным объемным выходом целевого сортимента, максимальной стоимостью выпиливаемых сортиментов, минимумом отходов и др. Запишем математическую модель данной задачи.

Например, на предприятии имеются бревна длиной L, м, которые необходимо разрезать на заготовки длиной l_1, м, в количестве b_1, шт.; l_2, м – b_2, шт.,…, l_m, м – b_m, шт. Составить оптимальный план раскроя материала, который обеспечивает минимальные отходы, при условии выполнения плана по выходу заготовок.

Каждое бревно можно распилить n различными вариантами. Обозначим через a_{ij} число заготовок длиной l_i, полученных из одного бревна при j-м варианте распиловки, а c_j – длину остатка при j-м варианте распиловки. Составим табл. 7.2 вариантов раскроя материала.

Таблица 7.2

Возможные варианты раскроя бревна

Длина заготовки, м	Варианты раскроя бревна				Количество заготовок
	1	2	…	n	
	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
l_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
:	…	…	…	…	…
l_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Длина остатка, м	c_1	c_2	…	c_n	–

Обозначим через $x_1, x_2, ..., x_n$ количество бревен, распиленных по вариантам $j = \overline{1, n}$ соответственно.

Тогда математическая модель данной производственной задачи представляет ЗЛП, состоящую в нахождении минимума функции

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \min \tag{7.3}$$

при ограничениях на количество заготовок

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{7.4}$$

3. Задача оптимальной загрузки оборудования. Задача оптимальной загрузки оборудования в цехе по углубленной переработке древесины решает еще и оптимальную программу выпуска лесоматериалов.

Пусть (не ограничивая общности) цех выпускает продукцию трех видов: P_1, P_2, P_3. Выпуском продукции занято оборудование четырех групп: A – окорочные станки; B – лесопильные рамы; C – брусующие станки; D – делительные станки. Исходные данные приведены в табл. 7.3.

Фонд времени Φ_i для станков каждой группы вычисляется по формуле

$$\Phi_i = T_i \cdot m \cdot n_i,\ i = \overline{1, 4}, \tag{7.5}$$

где T_i – продолжительность смены – часов; m – количество смен в сутки; n_i – количество станков в группе.

Таблица 7.3

Наличие и использование оборудования

Группы оборудования	Количество станков в группе	Фонд времени станков, ч	Затраты времени на 1 м^3 продукции, ч		
			P_1	P_2	P_3
A	n_1	Φ_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
B	n_2	Φ_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
C	n_3	Φ_3	a_{31}	a_{32}	a_{34}
D	n_4	Φ_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}
Прибыль за 1 м^3 продукции			c_1	c_2	c_3

Необходимо составить такой план загрузки оборудования, чтобы: а) прибыль от выпущенной продукции была максимальной;

б) оборудование было загружено по максимуму.

Обозначим через x_j количество продукции $P_j, j=\overline{1,3}$, которую планируем выпускать на имеющемся оборудовании. Вычисленные по формуле (7.5) фонды рабочего времени будем рассматривать как ограничения на ресурсы при составлении математической модели.

Загрузка оборудования по каждой группе станков дает нам систему ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le \Phi_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le \Phi_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le \Phi_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \le \Phi_4, \\ x_i \ge 0, i=\overline{1,3}. \end{cases} \tag{7.6}$$

Прибыль представляет собой функцию

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \tag{7.7}$$

где $c_j, j=\overline{1,3}$ – прибыль от реализации единицы продукции $P_j, j=\overline{1,3}$.

Таким образом, мы получили задачу ЛП по нахождению максимума функции (7.7) при ограничениях (7.6).

После нахождения оптимальных объемов продукции x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0 необходимо найти фактические затраты времени $\Phi_{i\text{ф}}$, $i=\overline{1,n}$, требуемые для выпуска оптимальных объемов продукции:

$$\Phi_{1ф} = a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0;$$

$$\Phi_{2ф} = a_{21}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{23}x_3^0;$$

$$\Phi_{3ф} = a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0;$$

$$\Phi_{4ф} = a_{41}x_1^0 + a_{42}x_2^0 + a_{43}x_3^0.$$

После этого находятся коэффициенты загрузки каждой группы станков:

$$K_A = \frac{\Phi_{1ф}}{\Phi_1}; K_B = \frac{\Phi_{2ф}}{\Phi_2}; K_C = \frac{\Phi_{3ф}}{\Phi_3}; K_D = \frac{\Phi_{4ф}}{\Phi_4}.$$

Если эти коэффициенты меньше требуемой величины, например 0,9, то принимаются технологические, организационные или другие меры, повышающие их значения вплоть до максимального, равного 1.

Например, можно уменьшить количество рабочих смен в сутки или сделать их неполными. Также можно рассмотреть вопрос о демонтаже и продаже избыточного количества станков и т. д.

Методами линейного программирования решаются и многие другие задачи лесопромышленного комплекса. Например, задача оптимизации парка автопоездов для вывоза древесины; задача оптимизации грузопотоков древесины (транспортная задача), задача составления дорожных смесей при строительстве лесных дорог (к этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т. д.).

7.2. Нормальная и каноническая формы задачи линейного программирования

Задачей линейного программирования (ЗЛП) в нормальной форме называется задача максимизации (минимизации) ***целевой функции***

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (7.8)$$

по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющим неравенствам

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{7.9}$$

при условии, что

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}, \tag{7.10}$$

где c_j, a_{ij}, b_{ij}, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ – постоянные числа. Запись $i = \overline{1,m}$ означает, что $i = 1, 2, ..., m$ [18].

В матричной форме ЗЛП имеет вид

$$z = c'x \quad \to \quad \max\ (\min); \tag{7.11}$$

$$Ax \le b; \tag{7.12}$$

$$x \ge 0, \tag{7.13}$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}; \quad j = \overline{1,n}; \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix};$$

$$A = [A_1, A_2, \cdots, A_n].$$

В линейном программировании с учетом физического смысла элементов представленных задач принято называть: *c* – ***вектор стоимости;*** *b* **– *вектор ограничений (вектор ресурсов);*** *A* **–*матрица условий (матрица затрат);*** A_j **–*векторы условий,*** столбцы матрицы ***A;*** *функция* (7.8) – ***целевая функция.***

Каждый вектор *x*, удовлетворяющий всем ограничениям задачи, называется ***планом.*** Множество $X = \{x : Ax \le b, x \ge 0\}$ – ***множество допустимых решений задачи*** (7.8)–(7.10). План $x^0 \in X$, являющийся оптимальным решением ЗЛП (7.8)–(7.10), называется ***оптимальным решением*** и обозначается $x^{\text{опт}}$.

Наряду с нормальной формой ЗЛП рассматривается ***каноническая форма*** ЗЛП, которую называют ***основной задачей ЛП.*** Она записывается в следующем виде:

$$z = c'x \quad \to \quad \max\ (\min); \tag{7.14}$$

$$Ax = b; \tag{7.15}$$

$$x \geq 0. \tag{7.16}$$

Две формы ЗЛП отличаются лишь типом ограничений. В нормальной форме ограничения типа неравенств, в канонической − типа равенств.

Ограничения типа неравенств можно свести введением свободных переменных к ограничениям типа равенств. Пусть ЗЛП записана в нормальной форме. В первое неравенство ограничений (7.9) добавим свободную переменную x_{n+1}, второе − x_{n+2}, последнее − x_{n+m}, тогда задача (7.8)–(7.10) примет вид

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + \ldots +$$

$$+ 0 \cdot x_{n+m} \to \max\ (\min) \tag{7.17}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{7.18}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m}. \tag{7.19}$$

В результате мы свели задачу к канонической форме.

И наоборот, если задача записана в нормальной форме, то каждое ограничение типа равенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде двух ограничений типа неравенств:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ -(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \leq -b_i. \end{cases}$$

Поэтому задачи в нормальной и канонической форме эквивалентны.

Задача ЛП в общем виде может иметь ограничения в виде линейных равенств и неравенств одновременно, а также не все переменные могут удовлетворять условию неотрицательности. Если в задаче ЛП не все переменные подчинены условию неотрицательности, то каждую такую переменную x_j заменяют разностью двух неотрицательных переменных x_j^1 и x_j^2, т. е. $x_j = x_j^1 - x_j^2, x_j^1 \geq 0$, $x_j^2 \geq 0$.

Замечание. Заметим, что задачу минимизации целевой функции z можно рассматривать как задачу максимизации функции $-z$, так как $\min z = -\max(-z)$.

7.3. Графический метод решения ЗЛП

Графический метод решения ЗЛП применяется для задач в нормальной форме, когда число переменных *равно двум*.

В этом случае задача имеет вид

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min), \tag{7.20}$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \vdots \\ aq_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \end{cases} \tag{7.21}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{7.22}$$

Рассмотрим плоскость Ox_1x_2 переменных x_1 и x_2. Решением каждого из неравенств

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, i = \overline{1, m} \tag{7.23}$$

является полуплоскость, которая лежит по одну сторону от прямой

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \ i = \overline{1, m}, \tag{7.24}$$

включая прямую.

Чтобы определить, какую полуплоскость задает неравенство (7.23), достаточно взять произвольную точку, не лежащую на прямой (7.24), и проверить, удовлетворяют ли ее координаты неравенству (7.23). Если удовлетворяют, то это неравенство определяет полуплоскость, которая содержит данную точку, если нет – то противоположную полуплоскость. Обычно в качестве такой точки берут начало координат O (0; 0).

Поэтому решением системы неравенств (7.2) на плоскости является, вообще говоря, выпуклая многоугольная область D. Вершины этого многоугольника обычно называют ***крайними точками.*** Эта область может быть пустым (рис. 7.1, *е*), ограниченным (рис. 7.1, *а*, *б*) и неограниченным (рис.7 1, *в*, *г*) множеством, одной точкой (рис. 7.1, *д*). Область D называется ***областью допустимых решений***.

Целевая функция (7.20) на плоскости Ox_1x_2 задает семейство параллельных прямых

$$c_1x_1 + c_2x_2 = c,$$

соответствующих различным значениям c и называемых ***линиями уровня***.

Нормальный вектор линий уровня

$$\vec{N}(c_1, c_2) = \text{grad}\, z = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$$

показывает направление возрастания целевой функции.

Таким образом, чтобы решить ЗЛП, нам нужно отыскать такие точки области D, в которых целевая функция $z = c_1x_1 + c_2x_2$ принимает наибольшее значение, если ищем максимум, и наименьшее – если ищем минимум.

Построим на плоскости Ox_1x_2 вектор $\vec{N}\{c_1; c_2\}$ и линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. Будем смещать линию уровня в направлении вектора $\vec{N}$ в случае задачи на максимум и $-\vec{N}$ – для задачи на минимум. Пусть найдется такое предельное положение этой прямой, при котором вся область D лежит по одну сторону от прямой и имеет с ней хотя бы одну общую точку. Эта прямая называется ***опорной прямой*** к области D.

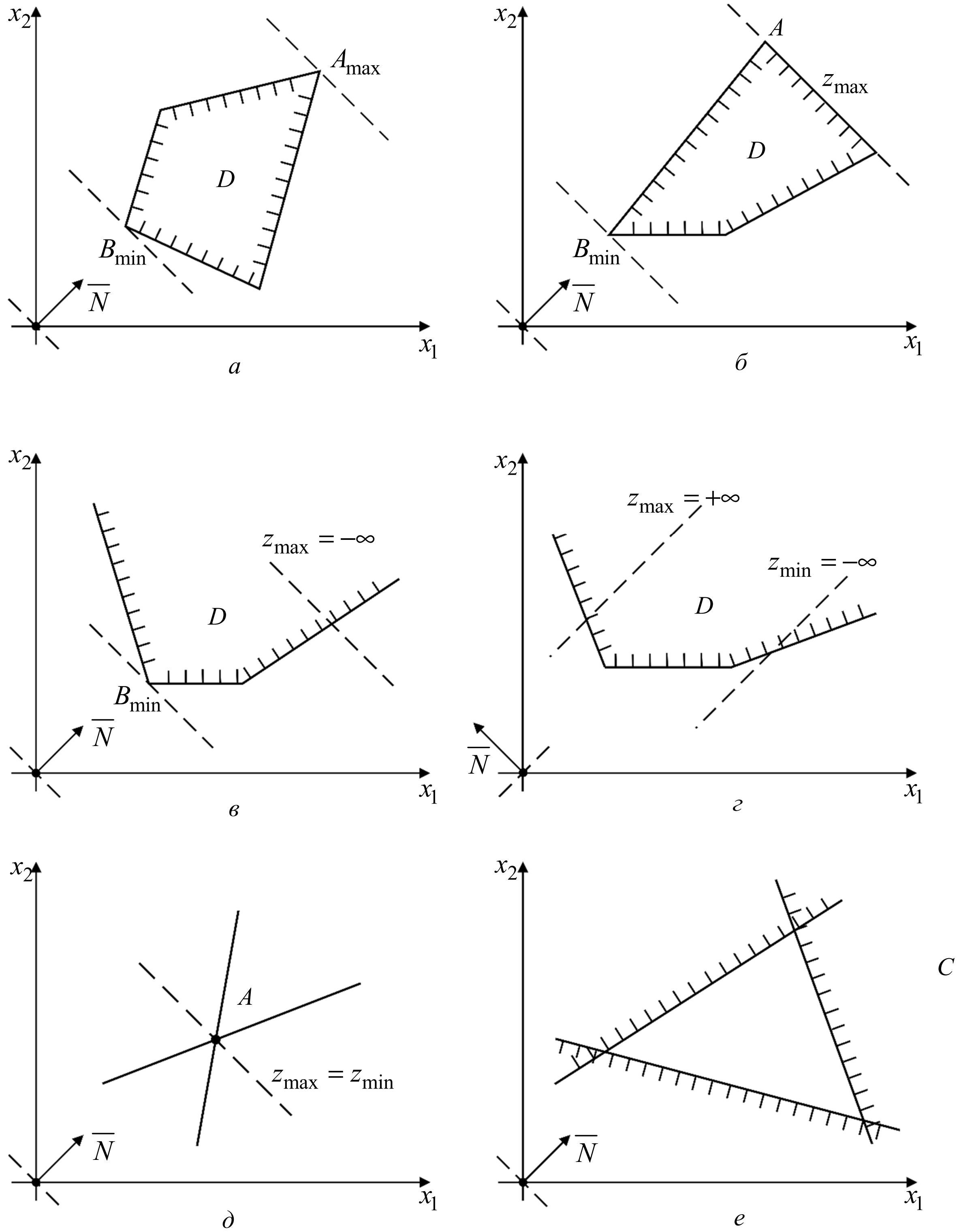


Рис. 7.1. Возможные виды областей допустимых решений

С учетом вышесказанного рекомендуется следующий алгоритм решения:

1) строим многоугольник допустимых решений;

2) строим вектор $\vec{N}(c_1, c_2)$ и прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, соответствующую $c = 0$;

3) параллельно перемещаем прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ в направлении вектора $\vec{N}(c_1, c_2)$, если ищем максимум функции z (или в направлении $-\vec{N}(c_1; c_2)$ – если ищем минимум функции z до положения опорной прямой;

4) координаты $(x_1^{\text{опт}}; x_2^{\text{опт}})$ точек, принадлежащих опорной прямой и области D одновременно, являются решением ЗЛП.

В зависимости от области допустимых решений D и различных целевых функций возможны следующие случаи решения ЗЛП.

Так, если область D ограничена, то функция достигает минимума в точке B и максимума в точке A (рис. 7.1, *а*), минимума в точке B и максимума на отрезке AC (рис. 7.1, *б*) и одновременно минимума и максимума в точке A (рис. 7.1, *д*).

В случае неограниченной области D функция может иметь один из экстремумов (минимум или максимум) конечный (рис. 7.1, *в*) или оба бесконечных экстремума (рис. 7.1, *г*). В случае, изображенном на рис. 7.1, *е*), задача не имеет решения, так как нет допустимых решений.

Если область D состоит из одной точка (рис. 7.1, *д*), то целевая функция достигает в этой точке минимальное и максимальное значения, равные между собой.

Координаты точек экстремума находятся из решения системы уравнений, соответствующих прямым, на пересечении которых расположена крайняя точка или множества точек некоторой стороны области D (рис. 7.1, *б*).

☒ *ПРИМЕР 1.* Для производства двух видов продукции из древесины П$_1$ и П$_2$ используются три вида сырья: S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли от реализации единицы продукции приведены в таблице.

Виды сырья S_i	Количество сырья на производство 1 м^3 продукции		Запасы сырья, м^3
	П$_1$	П$_2$	
S_1	2	5	18
S_2	8	4	48
S_3	5	6	32
Прибыль от реализации 1 м^3 продукции	20	30	–

Какое количество продукции Π_1 и Π_2 надо изготовить в рамках этих ресурсов, чтобы стоимость произведенной продукции была максимальной?

Решение. Обозначим через x_1 количество продукции Π_1, а через x_2 количество продукции Π_2.

Математическая модель этой задачи имеет вид

$$z = 20x_1 + 30x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 18, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 48, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 32, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

Решим графическим методом задачу оптимального использования сырья.

Построим многоугольник допустимых решений. Для этого на плоскости Ox_1x_2 построим граничные прямые (рис. 7.2).

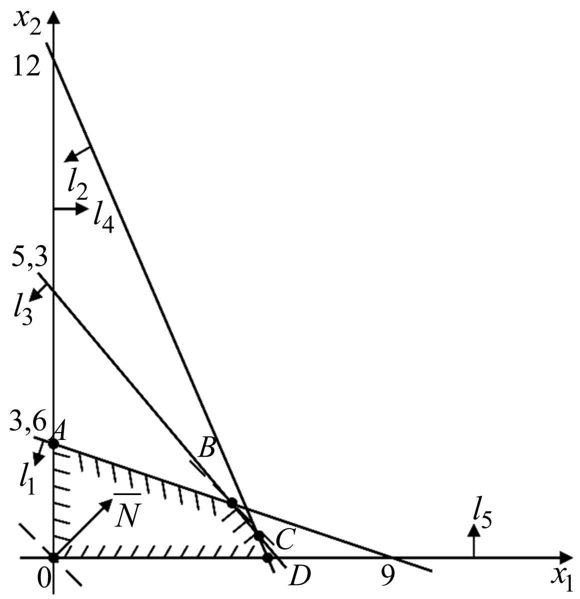


Рис. 7.2. Многоугольник допустимых решений

$$2x_1 + 5x_2 = 18 \quad (l_1),$$

$$8x_1 + 4x_2 = 48 \quad (l_2),$$

$$5x_1 + 6x_2 = 32 \quad (l_3),$$

$$x_1 = 0 \quad (l_4),$$

$$x_2 = 0 \quad (l_5).$$

Каждая граничная прямая разбивает плоскость Ox_1x_2 на две полуплоскости. Подставляя координаты точки $O(0; 0)$ в каждое из неравенств, определяем, какую полуплоскость она задает. Задаваемые неравенствами полуплоскости на рис. 7.2 указаны стрелками.

В нашем случае многоугольник допустимых решений представляет собой пятиугольник *OABCD*.

Строим прямую $20x_1 + 30x_2 = 0$ и вектор $\vec{N}(2; 3)$, который имеет то же направление, что и grad $z = \{20; 30\}$. Двигая построенную прямую параллельно, в направлении вектора $\vec{N}(2; 3)$, мы видим, что в точке *B* она становится опорной по отношению к многоугольнику *OABCD*, причем в этой точке функция *z* достигает максимального значения в области допустимых решений. Точка *B* лежит на пересечении прямых l_1 и l_3. Чтобы найти координаты точки *B*, решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 18, \\ 5x_1 + 6x_2 = 32. \end{cases}$$

Откуда имеем $x_1^{\text{опт}} = 4; x_2^{\text{опт}} = 2.$

Следовательно, $z_{\max} = 20 \cdot 4 + 30 \cdot 2 = 140.$

Таким образом, предприятие получит максимальную прибыль в размере 140 денежных единиц, если выпустит 4 м^3 продукции $П_1$ и 2 м^3 – $П_2$. Причем сырье S_1 и S_3 будет использовано полностью, а сырье S_2 останется неиспользованным в размере восьми единиц (48 – 8·4 – 4·2 = 8).

7.4. Симплекс-метод. Принцип оптимальности. Правила составления симплексной таблицы

Задачи линейного программирования с числом переменных больше двух геометрическим методом решить достаточно сложно. Для их решения используют аналитические методы. Одним из основных аналитических методов является симплекс-метод, предложенный американским ученым Дж. Данцигом. Теория и алгоритм симплекс-метода строятся только для канонической формы задачи линейного программирования (7.14)–(7.16).

Геометрическая интерпретация ЗЛП позволяет установить, что оптимальное решение этой задачи достигается в крайних точках многоугольника (многогранника при $n > 2$) решений системы ограничений. Поэтому решение можно найти методом перебора, т. е. найти все крайние точки (вершины) многогранника допустимых решений и, вычислив в них значения линейной формы, найти максимальное (минимальное) значение. Но с увеличением числа переменных n и числа ограничений m число крайних точек стремительно растет, поэтому отмеченный метод приводит к огромным вычислениям и большим затратам времени.

Выход из создавшегося положения был найден с помощью простого рассуждения. Не ограничивая общности, будем рассматривать ЗЛП на максимум. Пусть найдена некоторая крайняя точка A. Предположим, что по условиям задачи можно узнать, уменьшается или увеличивается линейная форма z при движении от точки A к некоторым другим крайним точкам. Если в одном из направлений линейная форма уменьшается, то нет смысла находить точку в этом направлении, так как в ней z имеет меньшее значение, чем в исходной. Двигаясь дальше только по направлениям, вдоль которых z увеличивается, можно существенно сократить количество вычислений. Приведенное рассуждение и есть описательное обоснование симплекс-метода.

Рассмотрим ЗЛП в канонической форме. Предполагаем, что среди векторов условий $A_1, A_2, ..., A_n$ найдутся m линейно независимых единичных векторов (базис). Соответствующие им переменные (компоненты вектора x) назовем базисными, а оставшиеся – свободными переменными. Не ограничивая общности, предполагаем, что базисными являются первые m переменных. Тогда ЗЛП приобретает вид

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max \tag{7.25}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + \qquad\qquad a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 + \qquad a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ \qquad x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{7.26}$$

Решением (планом) задачи линейного программирования будем называть вектор $x=\{x_1;x_2;...;x_n\}$, удовлетворяющий системе ограничений (7.26).

План называется ***базисным***, если вектора-столбцы условий A_j, соответствующие ненулевым компонентам $x_j \neq 0$ плана x, линейно независимы.

Базисный план называется ***невырожденным***, если он содержит ровно m положительных компонент, в противном случае базисный план называется ***вырожденным***.

Оптимальным планом $x^{\text{опт}}$ или оптимальным решением ЗЛП называется план, доставляющий максимальное значение целевой функции.

Решение задачи состоит из следующих этапов:

1. Построение первоначального базисного плана. Значения свободных переменных примем равными нулю $x_{m+1}=x_{m+2}= =\cdots=x_n=0$, тогда из (7.26) $x_1=b_1, x_2=b_2, ..., x_m=b_m$. Получим начальный базисный план $x^0=\{b_1;b_2;...;b_m;0;...;0\}$. Если все $b_i>0$, $i=\overline{1,m}$, то план ***невырожденный.***

Если задача задана в нормальной форме, то всегда легко найти первоначальный базисный план, перейдя к канонической форме (7.17)–(7.19). За единичный базис нужно взять векторы A_1, A_2, … A_m, соответствующие свободным переменным.

При решении ЗЛП симплекс-методом удобно пользоваться симплексными таблицами, которые составляются для каждого плана. Симплексная таблица (табл. 7.4) строится следующим образом. В первую строку заносятся коэффициенты линейной формы. Вторая строка служит для обозначений векторов. Последовательно в столбцах записывают такую информацию: в первом – обозначения базисных векторов $A_1, A_2, ..., A_m$, во втором – коэффициенты линейной формы z, соответствующие базисным векторам; в последующих столбцах – вектор-столбец свободных членов $b=\{b_1;b_2;...;b_m\}$ и векторы-столбцы $A_1, A_2, ..., A_m$ матрицы условий. Вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных будет $C_{\text{Б}}=\{c_1;c_2;...;c_m\}$.

Последнюю $m+1$ строку называют ***индексной строкой***. В нее заносят значение целевой функции для начального базисного плана

$$\Delta_0 = z_0 = C_Б b = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i \tag{7.27}$$

и оценки переменных

$$\Delta_j = z_j - c_j = C_Б A_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j,\ j = \overline{1, n}. \tag{7.28}$$

Оценки базисных переменных всегда равны нулю.

Таблица 7.4

Симплексная таблица

Базис	$C_Б$	b	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n	θ	
			A_1	A_2	…	A_m	A_{m+1}	…	A_k	…	A_n		
A_1	c_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}		
A_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
A_l	c_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}	…	a_{lk}	…	a_{ln}	θ_l	→
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
A_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}		
$z_j - c_j$		Δ_0	0	0	…	0	Δ_{m+1}		Δ_k	…	Δ_n	–	
									↑				

2. Критерий оптимальности базисного плана. Критерием оптимальности рассматриваемого решения (плана) является выполнение условия

$$\Delta_j = z_j - c_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}. \tag{7.29}$$

Если это условие не выполняется для некоторого номера j, тогда следует искать новый план, при котором значение целевой функции z было бы больше. Для этого переходят к новому базису. Чтобы определить, какой вектор следует ввести в базис, просматривают последнюю строку. Вектор, соответствующий минимальному отрицательному Δ_j, вводится в базис (если имеется несколько таких одинаковых Δ_j, то берется любой из них). Пусть

$$\Delta_k = \max_{\Delta_j<0} \left| \Delta_j \right|, \tag{7.30}$$

тогда вектор A_k нужно ввести в базис. Столбец, содержащий число Δ_k, называется ***разрешающим столбцом*** симплексной таблицы. Чтобы определить, какой вектор нужно вывести из базиса, вычисляют минимальное отношение координат b_i к положительным элементам a_{ik} разрешающего столбца, т. е. находят

$$\theta_0 = \min_i \frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0. \tag{7.31}$$

Для этого вычисляют симплексные отношения $\theta_i = b_i / a_{ik}$ для $a_{ik} > 0$ и помещают их в столбец θ, затем среди них выбирают наименьшее – θ_0. Пусть $\theta_0 = b_l / a_{lk}$, тогда вектор A_l нужно исключить из базиса. В симплексной таблице строка, содержащая число b_l, называется ***разрешающей***, а элемент a_{lk}, стоящий на пересечении разрешающих столбца и строки, – ***разрешающим (ключевым) элементом.***

Разрешающие строка и столбец в симплексной таблице (см. табл. 7.4) выделяются двойными или жирными линиями и отмечаются стрелками.

3. Переход к новому базисному плану. После того как определены разрешающие строка и столбец, строится новая симплексная таблица. В первом столбце записывается новый базис. Он отличается от старого одним вектором: вектор A_l заменяется вектором A_k. Соответственно, в столбце $C_Б$ коэффициент c_l заменяется коэффициентом c_k. Новые координаты векторов $b, A_1, A_2, ..., A_m$ в новом базисе находим по следующим формулам:

$$\begin{cases} b_j^{\text{н}} = b_j - \dfrac{b_l}{a_{lk}} a_{jk}\ (i \neq l);\ b_l^{\text{н}} = \dfrac{b_l}{a_{kl}}, \\ a_{ij}^{\text{н}} = a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik}\ (i \neq l);\ a_{lj}^{\text{н}} = \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}}. \end{cases} \tag{7.32}$$

Наиболее просто вычисляются элементы строки l и столбца k, являющиеся разрешающими в старой таблице. В столбце k новой таблицы все $a_{ik} = 0$, кроме $a_{lk} = 1$. Элементы строки l получаются из соответствующих элементов старой таблицы делением на a_{lk}.

Остальные элементы $a_{ij}^{\text{н}}$ и $b_j^{\text{н}}$ (формулы (7.32)) вычисляются по правилу «прямоугольника» (рис. 7.3). В старой таблице строим прямоугольник с вершинами $a_{ij}, a_{lj}, a_{lk}, a_{ik}$. Перемножаем элементы a_{lj} и a_{lk}, не лежащие на одной диагонали, с a_{ij}, результат делим на a_{lk} и полученное число вычитаем из a_{ij}. В итоге получаем новые значения

$$a_{ij}^{\text{н}} = a_{ij} - \frac{a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{lk}}, b_j^{\text{н}} = b_j - \frac{b_l \cdot a_{ik}}{a_{lk}}.$$

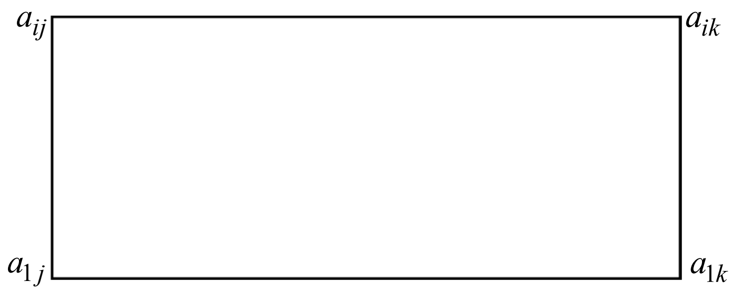


Рис. 7.3. Прямоугольник для вычисления $a_{ij}^{\text{н}}$ и $b_j^{\text{н}}$

После заполнения новой таблицы записываем новый базисный план x^1. Все отличные от нуля координаты нового вектора x^1 находятся в столбце вектора b, номер (индекс) координаты совпадает с номером базисного вектора, стоящего в той же строке, что и сама координата.

Затем находим оценки $\Delta^{\text{н}}{}_0, \Delta^{\text{н}}{}_j, j = \overline{1, n}$ и проверяем план x^1 на оптимальность. Если при решении задачи на максимум в новой таблице все оценки $\Delta^{\text{н}}{}_j \geq 0, j = \overline{1, n},$ то план x^1 является оптимальным; если же хотя бы одна из оценок $\Delta^{\text{н}}{}_j < 0$, то план x^1 не оптимальный и нужно переходить к новому базисному плану. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получен оптимальный план, т. е. пока не станут неотрицательными все оценки $\Delta_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$

Может встретиться случай, когда одна или несколько оценок $\Delta_j < 0$, а столбцы, соответствующие этим оценкам, не содержат положительных элементов a_{ij}. Тогда линейная форма z не ограничена.

Замечание 1. Для задачи $z \to \min$ можно использовать следующий критерий оптимальности плана: если все оценки $\Delta_j \le 0$, то данный план оптимален; в противном случае выбирается новый базисный вектор, соответствующий $\max\limits_{\Delta_j > 0}(\Delta_j)$.

Замечание 2. На практике при решении задачи $z \to \min$ обычно пользуются свойством $\min z = -\max(-x)$ и решают задачу на максимум.

Замечание 3. Если в результате преобразования симплекс-таблицы нет положительных симплексных отношений θ для разрешающей строки, то задача не имеет конечного решения.

Метод искусственного базиса (*M*-задача). Если в канонической форме ЗЛП не имеет единичного базиса или базисный план является недопустимым (содержит отрицательные значения), то вводится ***искусственный базис***. К левым частям равенств добавляют ***искусственные переменные*** x_j, $j = \overline{n+1, n+m}$, и переходят к расширенной задаче (*M*-задаче):

$$\tilde{z} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n - M(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \quad x_{n+2} \qquad = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\quad + x_{n+m} = b_m, \\ \qquad\qquad x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n+m}, \end{cases}$$

где M – произвольное достаточно большое положительное число.

Единичные векторы $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$, соответствующие искусственным переменным, образуют базис.

Решив *M*-задачу симплекс-методом через конечное число итераций, придем к оптимальному плану либо установим неразрешимость *M*-задачи.

Если в оптимальном плане *M*-задачи $\tilde{x}^{\text{опт}} = \left\{\tilde{x}_1^{\text{опт}}; \tilde{x}_2^{\text{опт}}; \ldots; \tilde{x}_n^{\text{опт}}; 0; 0; \ldots; 0\right\}$ все искусственные переменные равны нулю, то план $x^{\text{опт}} = \left\{\tilde{x}_1^{\text{опт}}; \tilde{x}_2^{\text{опт}}; \ldots; \tilde{x}_n^{\text{опт}}\right\}$ будет решением исходной задачи.

Если в оптимальном плане *М*-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, т. е. ее условия несовместны.

Замечание. Для удобства проверки плана на оптимальность в симплексной таблице *М*-задачи последняя индексная строка разделяется на две строки: в верхнюю записываются свободные слагаемые оценок, а в нижнюю коэффициенты при *М*. Критерий оптимальности сначала проверяется по коэффициентам *М*, и при их полном исключении задача решается обычным образом.

ПРИМЕР 2. На предприятии имеются бревна длиной 6 м, которые необходимо распилить на заготовки длиной 2,8 м в количестве 800 шт., 2,1 м – 900 шт., 1,8 м – 6000 шт.

Нужно составить оптимальный план распиловки материала, который обеспечивает минимальные отходы, при условии выполнения плана по выходу заготовок.

Решение. Сначала составим математическую модель нашей задачи. Возможные варианты распиловки и отходы при каждом из них запишем в виде таблицы.

Длина заготовки, м	Варианты раскроя						Количество заготовок
	1	2	3	4	5	6	
2,8	2	1	1	0	0	0	800
2,1	0	1	0	2	1	0	900
1,8	0	0	1	1	2	3	6000
Остаток	0,4	1,1	1,4	0	0,3	0,6	–

Обозначим через x_i количество бревен, распиленных по i-му варианту $(i=\overline{1,6})$. Тогда суммарный остаток отходов запишется в виде линейной функции:

$$z = 0,4x_1 + 1,1x_2 + 1,4x_3 + 0x_4 + 0,3x_5 + 0,6x_6. \qquad (7.33)$$

При этом должны выполняться условия плана по количеству заготовок, т. е.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 800, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 900, \\ x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 6000, \end{cases} \qquad (7.34)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}. \tag{7.35}$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо найти $\min z$ при ограничениях (7.34), (7.35). Поскольку $\min z = = -\max(-x)$, то вместо задачи минимизации функции (7.33) будем решать задачу максимизации функции

$$z = -(0,4x_1 + 1,1x_2 + 1,4x_3 + 0x_4 + 0,3x_5 + 0,6x_6) \tag{7.36}$$

при ограничениях (7.34), (7.35).

Решать эту задачу будем симплекс-методом. Для нахождения начального плана необходимо выделить единичный базис из матрицы условий:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица не содержит единичных векторов. Однако, когда мы первое уравнение ограничений (7.34) разделим на 2, а третье – на 3, то получим равнозначную систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 400, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 900, \\ \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 + x_6 = 2000, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}. \end{cases} \tag{7.37}$$

Матрица условий этой системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \tag{7.38}$$

и содержит два единичных вектора $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. До единичного базиса нам не хватает одного единичного вектора. Во второе уравнение добавим искусственную переменную x_7, в результате чего получим M-задачу с одной искусственной переменной и единичным базисом:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{z} = -0,4x_1 - 1,1x_2 - 1,4x_3 - 0,3x_5 - 0,6x_6 - M\,x_7 \to \max, \quad (7.39)$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 400, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 900, \\ \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 + x_6 = 2000, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,7}. \end{cases} \quad (7.40)$$

Первоначальный базисный план расширенной задачи будет $\tilde{x}^0 = \{400; 0; 0; 0; 0; 2000; 900\}$. Запишем первоначальную симплекс-таблицу для полученной M-задачи (табл. 7.5). В столбцах A_j стоят коэффициенты при x_j из ограничений (7.40).

Проверяем план $\tilde{x}^0$ на оптимальность. Для этого вычисляем оценки Δ_j. Оценки Δ_j находятся следующим методом: перемножаются элементы столбца $C_Б$ на соответствующие элементы столбца A_j и их результаты складываются, после чего от полученной суммы отнимается величина c_j.

Таблица 7.5

Симплекс-таблица расширенной задачи

Базис	$C_Б$	b	–0,4	–1,1	–1,4	0	–0,3	–0,6	$-M$	θ	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7		
A_1	–0,4	400	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	–	
A_7	$-M$	900	0	1	0	2	1	0	1	450	→
A_6	–0,6	2000	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	6000	
$\Delta_j = z_j - c_j$		–1360	0	0,9	1	–0,2	–0,1	0	0	–	
M		–900	0	–1	0	–2	–1	0	0	–	
						↑					

Например,

$$\Delta_2 = (-0,4)\cdot\frac{1}{2} + (-M)\cdot 1 + (-0,6)\cdot 0 - (-1,1) = 0,9 - M.$$

В четвертой строке столбца A_2 записываем 0,9, а в пятой –1 – коэффициент при M. Аналогично делаем для остальных столбцов. Вначале проверяем элементы последней строки, т. е. коэффициенты при M, так как они оказывают существенное влияние на величину оценки Δ_j. Среди оценок Δ_j имеются отрицательные, а именно $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_5$, следовательно, план $\tilde{x}^0$ не оптимальный, и мы должны перейти к новому базисному плану. Среди отрицательных оценок находим наименьшую. Она соответствует столбцу A_4. Этот столбец является ***разрешающим столбцом***, и вектор A_4 введем в новый базис, а далее найдем вектор, который необходимо вывести из базиса.

Для этого вычислим симплексные отношения θ_i. Элементы столбца b делим на соответствующие положительные элементы столбца A_4 и среди полученных θ_i находим наименьшее $\theta_2 = 450$. Вектор A_7, соответствующий θ_2, выводим из базиса. Строка, соответствующая вектору A_7, является ***разрешающей строкой.*** Элемент $a_{24} = 2$, который стоит на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, есть ***разрешающий элемент.*** Разрешающая строка и столбец выделяются толстыми линиями. Напротив их ставятся стрелки, которые показывают, какой вектор надо ввести в базис, а какой – вывести.

Построим новую симплекс-таблицу (табл. 7.6).

Таблица 7.6

Новая симплекс-таблица примера 2

Базис	$C_Б$	b	−0,4	−1,1	−1,4	0	−0,3	−0,6	$-M$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	−0,4	400	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
A_4	0	450	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
A_6	−0,6	1850	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{6}$
$\Delta_j = z_j - c_j$		–1270	0	1	1	0	0	0	0,1
M		0	0	0	0	0	0	0	+1

1) Элементы разрешающей строки, начиная со столбца b, делим на разрешающий элемент.

2) Вместо элементов разрешающего столбца, кроме разрешающего элемента, запишем нули, а на месте разрешающего элемента – единицу.

3) Все остальные элементы $a_{ij}^{\text{н}}$ и $b_j^{\text{н}}$ находим по правилу «прямоугольника». В первоначальной таблице строим прямоугольники с вершинами в разрешающем элементе (рис. 7.4) на разрешающей строке и на разрешающем столбце, т. е. $a_{ij}, a_{i4}, a_{2j}, a_{24}$. Перемножаем элементы a_{2j} и a_{i4}, которые лежат на одной диагонали, результат делим на a_{24} и полученное число отнимаем от a_{ij}, т. е.

$$a_{ij}^{\text{н}} = a_{ij} - \frac{a_{2j}a_{i4}}{a_{24}},\ b_j^{\text{н}} = b_j - \frac{b_2 \cdot a_{i4}}{a_{24}}.$$

Например,

$$b_3^{\text{н}} = 2000 - \frac{300}{2} = 1850.$$

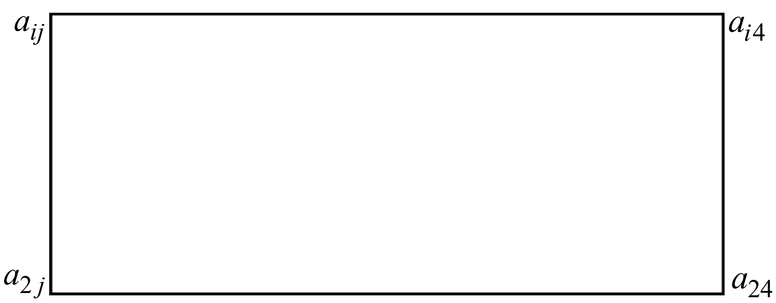


Рис. 7.4. Прямоугольник для вычисления $a_{ij}^{\text{н}}$ и $b_j^{\text{н}}$ в примере 2

Получили новый базисный план $\tilde{x}^1 = \{400; 0; 0; 450; 0; 1850; 0\}$. Проверяем план $\tilde{x}^1$ на оптимальность. Для этого вычисляем оценки Δ_j. Так как все оценки $\Delta_j \geq 0$, то план $\tilde{x}^1$ будет оптимальным.

Вывод. По первому варианту нужно распилить 400 бревен, по четвертому − 450, по шестому − 1850. При этом отходы будут минимальными и равными

$$z_{\min} = 0{,}4 \cdot 400 + 0 \cdot 450 + 0{,}6 \cdot 1850 = 1270 \text{ м}.$$

7.5. Транспортная задача

Транспортная задача считается одной из первых прикладных задач, для решения которых успешно применяются методы линейного программирования [19]. Транспортную задачу для двух поставщиков исследовал в 1930-х гг. советский математик Толстой А. Н. В общем случае транспортная задача была решена методом потенциалов академиком Канторовичем Л. В.

Ее можно рассматривать как задачу об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления с минимальными затратами на перевозки.

Под термином «транспортные задачи» понимается широкий круг задач не только транспортного характера. Это задачи: распределения ресурсов, находящихся у m производителей (поставщиков), по n потребителям этих ресурсов; задача о закреплении станков по операциям и многие др.

Постановка задачи. Имеется m поставщиков $A_1, A_2, ..., A_m$, в которых сосредоточено или производится $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц однородного товара. Этот товар нужно доставить n потребителям $B_1, B_2, ..., B_n$ в количествах $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц соответственно. Известны также стоимости c_{ij} перевозок единицы товара из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Например, c_{12} указывает стоимость перевозки единицы товара из первого пункта отправления во второй пункт назначения.

Необходимо составить план перевозок, который обеспечит их суммарную минимальную стоимость, позволяя вывезти все грузы от поставщиков $A_i, i = \overline{1, m}$, и удовлетворит все нужды потребителей $B_j = \overline{1, n}$.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

Обычно стоимость перевозок c_{ij} записывают в виде матрицы тарифов

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

а объемы перевозок x_{ij} – в виде матрицы перевозок

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда условие задачи можно записать в виде табл. 7.7, которая называется ***таблицей планирования.***

Запишем математическую модель задачи. Суммарная стоимость всех перевозок

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}. \tag{7.41}$$

Ограничения по вывозу продукта – все грузы должны быть вывезены (эти уравнения получаются при суммировании элементов матрицы планирования по строкам):

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,m}. \tag{7.42}$$

Таблица 7.7

Таблица планирования

Поставщики A_i	Потребители B_j				Запасы a_i
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_m	Условие баланса $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$

Ограничения по поставке продукта – все потребности должны быть удовлетворены (уравнения получаются при суммировании по столбцам):

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, j = \overline{1, n}. \tag{7.43}$$

Таким образом, задача сводится к минимизации линейной функции (7.41) при ограничениях (7.42), (7.43).

Известно, что задача всегда имеет решение, если выполняется ***условие баланса***:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{7.44}$$

Такая транспортная задача называется ***закрытой.***

Замечание. Оптимальных решений может быть несколько, но минимальная стоимость перевозок одинакова.

Если условие баланса не выполняется, то задача считается ***открытой.*** Открытую модель можно преобразовать в закрытую.

Решение транспортной задачи состоит из трех основных этапов:

1) построение первоначального базисного плана перевозок;

2) проверка плана на оптимальность;

3) в случае неоптимальности плана указание процедуры перехода к новому базисному плану.

1-й этап. Построение первоначального базисного плана. Обычно первоначальный план строится по методу «северо-западного угла», или методом «минимальной стоимости», и заключается в заполнении клеток таблицы планирования перевозками x_{ij} от i-го поставщика к j-му потребителю.

Метод «северо-западного угла». Таблица заполняется по принципу слева направо и сверху вниз. Вначале заполняют клетки первой строки, пока не будут исчерпаны все запасы a_1, при этом по возможности полностью удовлетворяя потребности B_1, B_2 и т. д. Затем клетки второй строки до полного исчерпания запасов a_2, начиная с потребителя, потребности которого не были полностью удовлетворены, и т. д.

Метод «минимальной стоимости». Вначале заполняют клетку с минимальным тарифом c_{ij}, далее грузы распределяются по клеткам в порядке неубывания тарифов с учетом оставшихся запасов у поставщиков и спроса потребителей.

Клетки, в которых стоят отличные от нуля перевозки x_{ij}, называются ***загруженными (занятыми),*** остальные – ***свободными.***

Базисность плана состоит в его ***ацикличности***, т. е. в матрице планирования нельзя построить цикл, все вершины которого расположены в занятых клетках.

Циклом называется замкнутая ломаная линия с вершинами, находящимися в клетках таблицы планирования, у которой две и только две соседние вершины расположены в одном столбце или в одной строке, причем последняя вершина находится в той же строке или в том же столбце, что и первая (рис. 7.5). Отметим, что у цикла число вершин четное, углы прямые, а точки самопересечения линий (звеньев ломаной) вершинами цикла не являются.

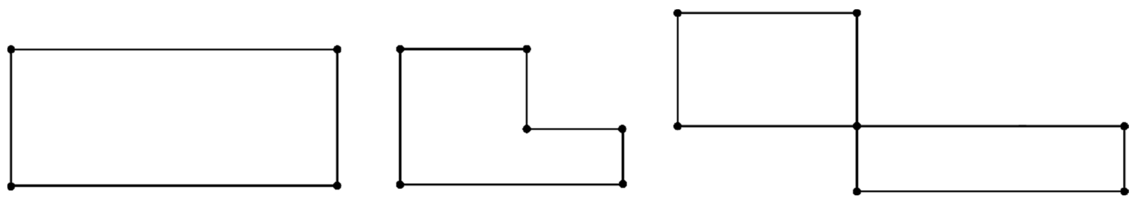


Рис. 7.5. Примеры циклов

Базисный план транспортной задачи называется ***невырожденным***, если он содержит $m+n-1$ загруженную клетку.

Обычно по правилу «северо-западного угла» получают невырожденный план, но, как правило, далекий от оптимального.

Замечание 1. Если построенный первоначальный план вырожденный (загруженных клеток меньше, чем $m+n-1$), следует дополнить количество занятых клеток до $m+n-1$, вводя фиктивные перевозки с нулевым количеством груза. Такие клетки будем считать загруженными. Причем берутся только те клетки, из которых вместе с загруженными клетками нельзя построить цикл.

Замечание 2. Для любого невырожденного базисного плана и для каждой свободной клетки существует, и притом только один, цикл, содержащий данную клетку и некоторые загруженные клетки.

2-й этап. Проверка на оптимальность. Транспортную задачу будем решать модификацией симплекс-метода – методом потенциалов. Пусть построен первоначальный невырожденный базисный план. Каждому поставщику (каждой строке) поставим в соответствие некоторое число U_i, $i=\overline{1,\ m}$, называемое ***потенциалом поставщика*** A_i, а каждому потребителю (каждому столбцу) – некоторое число V_j, $j=\overline{1,n}$, называемое ***потенциалом потребителя.***

Числа U_i и V_j выбираем так, чтобы в любой занятой клетке

$$U_i+V_j=c_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}. \tag{7.45}$$

Невырожденный базисный план содержит $m+n-1$ заполненную клетку, поэтому для него можно составить систему $m+n-1$ независимых уравнений с $m+n$ неизвестными. Уравнений на одно меньше, чем неизвестных, поэтому одному из неизвестных нужно придать произвольное значение (лучше всего положить его равным нулю), тогда $m+n-1$ неизвестных потенциалов определяется однозначно.

Для каждой свободной клетки вычисляем «косвенные» тарифы U_i+V_j и сравниваем со стоимостью c_{ij}. Если для всех свободных клеток оценки

$$\Delta_{ij}=c_{ij}-(U_i+V_j)\geq 0,$$

то план оптимальный.

Если хотя бы для одной клетки $\Delta_{ij}<0$, то план неоптимальный и переходим к новому базисному плану.

3-й этап. Построение нового базисного плана. Клетки, для которых $\Delta_{ij}<0$, называются ***перспективными.*** Среди перспективных клеток выбираем ту, для которой оценка Δ_{ij} наименьшая. Если таких клеток несколько, то среди них выбирают любую.

Для выбранной перспективной клетки строят цикл, у которого одна из вершин находится в перспективной клетке, а остальные – в загруженных клетках. По данному циклу перераспределяют груз. Для этого цикл размечают – в перспективной клетке ставят знак «+», а в остальных вершинах цикла поочередно «–» и «+». В клетках со знаком «–» выбирают наименьший груз θ и его перемещают по клеткам цикла, т. е. прибавляют к поставкам x_{ij} в клетках со знаком «+» (включая перспективную) и вычитают в клетках со знаком «–». В результате перераспределения получаем новый базисный план, в который вошла перспективная клетка и из которого вышла одна загруженная. Новый план опять проверяем на оптимальность.

Для этого заново находим потенциалы, оценки, проверяем условие оптимальности. Продолжаем процесс до тех пор, пока не получится оптимальный план перевозок.

☒ *ПРИМЕР 3.* Четыре лесхоза заготавливают пиловочник в следующих объемах: 1-й лесхоз $- a_1 = 300$ тыс. м^3; 2-й – $a_2 = 400$ тыс. м^3; 3-й – $a_3 = 300$ тыс. м^3; 4-й – $a_4 = 400$ тыс. м^3. Всего $\sum_{i=1}^{4} a_i = 1400$ тыс. м^3. Этот пиловочник используют четыре лесопильных завода в объемах: 1-й завод – $b_1 = 200$ тыс. м^3; 2-й – $b_2 = 350$ тыс. м^3; 3-й – $b_3 = 400$ тыс. м^3; 4-й – $b_4 = 450$ тыс. м^3. Всего $\sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$ тыс. м^3. Матрица стоимости перевозок (матрица тарифов) имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок, чтобы весь пиловочник был вывезен, все потребности были удовлетворены, а транспортные затраты были минимальными.

Решение. Все исходные данные запишем в виде таблицы планирования

Лесхозы A_i	Лесопильные заводы				Запасы a_i	Потенциалы U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2	3	5 0 –	2 300 +	300	$U_1 = 0$
A_2	4	2	1 400	3	400	$U_2 = -4$
A_3	3	4 150	3 +	5 150 –	300	$U_3 = 3$
A_4	1 200	2 200	2	4	400	$U_4 = 1$
Потребности b_j	200	350	400	450	1400	–
Потенциалы V_j	$V_1 = 0$	$V_2 = 1$	$V_3 = 5$	$V_4 = 2$	–	

В правом верхнем углу клетки $(i; j)$ дается цена перевозки единицы груза c_{ij}, которую назовем стоимостью клетки. Первоначальный план строим методом «минимальной стоимости». В матрице транспортной задачи выбираем наименьший элемент. Он равен единице. Ему соответствуют клетки (4; 1) и (2; 3). Выбираем любую, например (4; 1), записываем в ней число $\min(200;400)=200$ и исключаем из рассмотрения первый столбец. В клетку (2; 3) записываем $\min(400;400)=400$ и исключаем из рассмотрения второй столбец и вторую строку. Минимальная цена для незаполненных клеток будет равна 2. Таких клеток две: (1; 4) и (4; 2). Записываем в клетку (1; 4) $\min(300;450)=300,$ а в клетку (4; 2) − $\min(300;200)=200.$ Остались незаполненными два столбца: второй и четвертый. Записываем оставшиеся нераспределенные объемы в клетку (3; 2) − 150 тыс. м^3 и в клетку (3; 4) − 150 тыс. м^3.

Так как количество загруженных клеток $6 < m+n-1=4+4-1=7,$ то план вырожденный. Дополним его до невырожденного фиктивной загруженной клеткой (1; 3). Эта клетка не составляет с другими занятыми клетками цикл (клетки (1; 1) и (1; 2) нельзя включать в невырожденный план, так как для них существует замкнутый цикл). Таким образом, мы получили начальный невырожденный план.

Теперь найдем потенциалы. По загруженным клеткам записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} U_1+V_3=5, \\ U_1+V_4=2, \\ U_2+V_3=1, \\ U_3+V_2=4, \\ U_3+V_4=5, \\ U_4+V_1=1, \\ U_4+V_2=2. \end{cases}$$

Решая эту систему при условии $U_1=0,$ находим потенциалы:

$$U_1=0;\ U_2=-4;\ U_3=3;\ U_4=1;\ V_1=0;\ V_2=1;\ V_3=5;\ V_4=2$$

и записываем в соответствующие столбец и строку таблицы планирования. Проверим на оптимальность. Для всех свободных клеток вычисляем оценки:

$$\Delta_{11}=c_{12}-(U_1+V)=2-(0+0)=2>0;$$

$$\Delta_{12} = c_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 + 1) = 2 > 0;$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (U_2 + V_1) = 4 - (-4 + 0) = 8 > 0;$$
$$\Delta_{22} = c_{22} - (U_2 + V_2) = 2 - (-4 + 1) = 5 > 0;$$
$$\Delta_{24} = c_{24} - (U_2 + V_4) = 3 - (-4 + 2) = 5 > 0;$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (U_3 + V_1) = 3 - (3 + 0) = 0 \geq 0;$$
$$\underline{\Delta_{33} = c_{33} - (U_3 + V_3) = 3 - (3 + 5) = -5 < 0;}$$
$$\underline{\Delta_{43} = c_{43} - (U_4 + V_3) = 2 - (1 + 5) = -4 < 0;}$$
$$\Delta_{44} = C_{44} - (U_4 + V_4) = 4 - (1 + 2) = 1 > 0.$$

План не является оптимальным, потому что $\Delta_{33} < 0$ и $\Delta_{43} < 0$.

Переходим к построению нового базисного плана. Так как $\min(\Delta_{33};\Delta_{34}) = \min(-5;-4) = -5$ достигается в клетке (3; 3), то клетка (3; 3) будет ***перспективной.*** Для клетки (3; 3) строим цикл с вершинами в клетках (3; 3), (1; 3), (1; 4), (3; 4). Расставим знаки «+» в клетках (3; 3) и (1; 4) и «–» в клетках (1; 3) и (3; 4).

Найдем минимальную перевозку θ среди клеток с отрицательными знаками $\theta = \min\,(x_{13}; x_{34}) = \min(0;150) = 0$. Значение θ запишем в перспективную клетку (3; 3), прибавим к перевозкам в клетку (1; 4) и отнимаем от перевозок клеток (1; 3) и (3; 4). Таким образом, мы получили новую таблицу планирования.

Лесхозы A_i	Лесопильные заводы				Запасы a_i	Потенциалы U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2	3	5	2 300	300	$U_1 = 0$
A_2	4	2	1 400	3	400	$U_2 = 1$
A_3	3	4 150	3 0	5 150	300	$U_3 = 3$
A_4	1 200	2 200	2	4	400	$U_4 = 1$
Потребности b_j	200	350	400	450	1400	–
Потенциалы V_j	$V_1 = 0$	$V_2 = 1$	$V_3 = 0$	$V_4 = 2$	–	–

Отметим, что поскольку в цикл с отрицательными вершинами вошла клетка с фиктивными перевозками, то новая матрица планирования практически не изменилась, за исключением того, что клеткой с фиктивными перевозками стала клетка (3; 3) вместо клетки (1; 3).

Новый план проверяем на оптимальность. Запишем систему уравнений для нахождения потенциалов:

$$\begin{cases} U_1 + V_4 = 2, \\ U_2 + V_3 = 1, \\ U_3 + V_2 = 4, \\ U_3 + V_3 = 3, \\ U_3 + V_4 = 5, \\ U_4 + V_1 = 1, \\ U_4 + V_2 = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему при условии $U_1 = 0,$ находим потенциалы:

$$U_1 = 0;\ U_2 = 1;\ U_3 = 3;\ U_4 = 1;\ V_1 = 0;\ U_2 = 1;\ V_3 = 0;\ V_4 = 2$$

и записываем в таблицу. Вычисляем Δ_{ij} для незагруженных клеток.

$$\Delta_{11} = c_{11} - (U_1 + V_1) = 2 - (0 + 0) = 2 > 0;$$
$$\Delta_{12} = c_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (1 + 0) = 2 > 0;$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - (U_1 + V_3) = 5 - (0 + 0) = 5 > 0;$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (U_2 + V_1) = 4 - (1 + 0) = 3 > 0;$$
$$\Delta_{22} = c_{22} - (U_2 + V_2) = 2 - (1 + 1) = 0 \geq 0;$$
$$\Delta_{24} = c_{24} - (U_2 + V_4) = 3 - (1 + 2) = 0 \geq 0;$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (U_3 + V_1) = 3 - (3 + 0) \geq 0;$$
$$\Delta_{44} = c_{44} - (U_4 + V_4) = 4 - (1 + 2) = 1 > 0.$$

Поскольку все $\Delta_{ij} \geq 0,$ то план оптимальный. Матрица оптимальных перевозок имеет вид

$$X^{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 150 \\ 200 & 200 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспортные затраты составляют

$$z = 300 \cdot 2 + 400 \cdot 1 + 150 \cdot 4 + 150 \cdot 5 + 200 \cdot 1 + 200 \cdot 2 = 2950 \text{ ден. ед.}$$

7.6. Открытая модель транспортной задачи

Как отмечалось выше, метод потенциалов работает только для закрытой модели транспортной задачи, когда выполняется условие баланса. В случае открытой транспортной задачи, когда объем производимой продукции превышает объем потребляемой или, наоборот, когда объем продукции, необходимой потребителям, превышает объем производимой, условие баланса не выполняется и решить задачу методом потенциалов невозможно. Если условие баланса не выполняется, то задача считается ***открытой.***

Открытую модель нужно преобразовать в закрытую.

Если запасов груза больше, чем потребности, то вводится фиктивный $(n+1)$-й потребитель B_{n+1} с потребностями в грузе

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Обычно все тарифы на доставку груза в этот пункт полагаются равными нулю.

Если же потребности больше чем производится продукции, то вводится фиктивный $(m+1)$-й поставщик A_{m+1} с запасом груза

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Обычно все тарифы на доставку грузов от этого фиктивного поставщика полагают равными нулю. Тогда выполняется условие баланса и задача имеет решение. В найденном оптимальном решении задачи фиктивные потребители или поставщики не учитываются.

Замечание. Иногда при переходе от открытой модели транспортной задачи к закрытой приходится учитывать тот факт (субъективные интересы), *что запасы некоторого поставщика должны быть обязательно вывезены* при избытке запасов *или потребности какого-то потребителя должны быть обязательно удовлетворены* при недостатке продукции у поставщиков. В этом случае тариф на доставку грузов от фиктивного поставщика к нужному потребителю или от нужного поставщика к фиктивному потребителю полагают равными M, где M – очень большое положительное число. Тогда перевозки по соответствующим маршрутам становятся невыгодными, так как они сильно увеличивают стоимость перевозок и не войдут в оптимальный план перевозок. Продемонстрируем это на конкретном примере.

☒ *ПРИМЕР 4.* Три лесозаготовительных предприятия A_1, A_2, A_3 производят в сутки круглые лесоматериалы в объемах 650, 450, 550 м^3 соответственно. Сортименты потребляются четырьмя деревообрабатывающими предприятиями B_1, B_2, B_3, B_4 в объемах 300, 600, 150, 400 м^3 соответственно. Стоимости перевозок c_{ij} с предприятий на предприятия $B_j, j = \overline{1,4}$ 1 м^3 лесоматериалов задана матрицей тарифов

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 7 \\ 12 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Необходимо составить такой план перевозок лесоматериалов, чтобы выполнялись следующие условия:

1) суммарные транспортные расходы были минимальны;

2) потребности предприятий-потребителей были удовлетворены полностью;

3) вся продукция *предприятия* A_2 должна быть вывезена;

4) были указаны предприятия, на которых останутся невывезенные сортименты, и их объемы.

Решение. Сравнивая суммарный объем производимых лесоматериалов $650 + 450 + 550 = 1650$ с суммарным объемом потребляемых $300 + 600 + 150 + 400 = 1450$, видим, что эти суммы не совпадают. Объем производимых лесоматериалов превышает объем потребляемой продукции на 200 м^3. Таким образом, мы имеем открытую транспортную задачу при дополнительном условии (п. 3).

Сведем задачу к закрытой транспортной модели, для чего введем фиктивного потребителя B_5 с потребностями, равными дисбалансу, т. е. 200 м^3, с затратами на перевозку, равными $c_{15} = 0$, $c_{25} = M$, $c_{35} = 0$. Чтобы учесть дополнительное условие полного вывоза продукции предприятия A_2 (п. 3), мы искусственно завысили стоимость перевозки 1 м^3 c_{25} до величины M (M – сколь угодно большое число). В таком случае доставка по маршруту $A_2 - B_5$ станет невыгодной и в оптимальном плане производитель A_2 будет связан лишь с реальными потребителями, значит, будет выполнено условие п. 3. Все исходные данные запишем в виде таблицы планирования

Первоначальный план строим по методу «минимальной стоимости». Так как наименьшими являются нулевые показатели для клеток (1; 5) и (3; 5), то первой заполним, например, клетку (1; 5). Перевозка для этой клетки равна $\min(650;200) = 200$. Остаток продукции завода A_2 – 450 м^3 распределим между клетками (1; 4) и (1; 3) в порядке возрастания их стоимостей и с учетом заказов потребителей B_4 и B_3 т. е. в клетку (1; 4) помещаем 400 м^3, а в клетку (1; 3) – оставшиеся 50 м^3.

Производители A_i	Потребители					Объемы производства	Потенциалы U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	8	10 +	7 50	5 400	0 –200	650	$U_1 = 0$
A_2	5 300	8 + 50	10 –100	7	M	450	$U_2 = 3$
A_3	12	7 – 550	10	8	0 +	550	$U_3 = 2$
Объемы потребления	300	600	150	400	200	1650	–
Потенциалы V_i	$V_1 = 2$	$V_2 = 5$	$V_3 = 7$	$V_4 = 5$	$V_5 = 0$	–	

Чтобы обеспечить лесоматериалами потребителя B_3, остается запланировать ему поставку 100 м^3 от производителя A_2 или A_3 (показатели стоимости в клетках (2; 3) и (3; 3) оказались одинаковыми). Заполним, например, клетку (2; 3). Остаток лесоматериалов на предприятии в размере 350 м^3 распределим по клеткам (2; 1) – 300 м^3 и (2; 2) – 50 м^3, учитывая порядок возрастания стоимости перевозки единицы продукции в этих клетках и потребности предприятий B_1 и B_2.

Недостающие 550 м^3 для предприятия B_2 запланируем от предприятия A_3. Таким образом, у нас оказались загруженными ровно семь клеток и выполняются все балансовые равенства как по строкам, так и по столбцам.

Поскольку количество загруженных клеток $7 = 3 + 5 - 1 = m + n - 1$, то полученный первоначальный базисный план является невырожденным. Проверим его на оптимальность. Для этого найдем потенциалы U_i и V_j предприятий A_i и B_j. По загруженным клеткам записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} U_1 + V_3 = 7, \\ U_1 + V_4 = 5, \\ U_1 + V_5 = 0, \\ U_2 + V_1 = 5, \\ U_2 + V_2 = 8, \\ U_2 + V_3 = 10, \\ U_3 + V_2 = 7. \end{cases}$$

Это неопределенная система, так как неизвестных на одно больше, чем число уравнений. Придадим одному из неизвестных определенное числовое значение, например $U_1 = 0$. Тогда остальные неизвестные однозначно находятся из системы и равны

$$U_2 = 3; U_3 = 2;\ V_1 = 2;\ V_2 = 5;\ V_3 = 7;\ V_4 = 5;\ V_5 = 0.$$

Их значения записываем в соответствующие строку и столбец таблицы планирования. Теперь вычислим оценки $\Delta_{ij} = c_{ij} - (U_i + V_j)$ свободных клеток:

$$\Delta_{11} = 8 - (0 + 2) = 6 > 0;$$

$$\Delta_{12} = 10 - (0 + 5) = 5 > 0;$$

$$\Delta_{24} = 7 - (3 + 5) = -1 < 0;$$

$$\Delta_{25} = M - (3 + 0) = M - 3 > 0;$$

$$\Delta_{31} = 12 - (2 + 2) = 8 > 0;$$

$$\Delta_{33} = 10 - (2 + 7) = 1 > 0;$$

$$\Delta_{34} = 8 - (2 + 5) = 1 > 0;$$

$$\Delta_{35} = 0 - (2 + 0) = -2 < 0.$$

Среди оценок есть отрицательные, значит, план не является оптимальным.

Строим новый базисный план. У нас две клетки с отрицательной оценкой (2; 4) и (3; 5). Так как $\Delta_{35} < \Delta_{24}$, то клетка (3; 5) будет ***перспективной.*** Для клетки (3; 5) строим замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках (3; 2), (2; 2), (2; 3), (1; 3), (1; 5). Размечаем цикл, расставляя поочередно, начиная с клетки (3; 5), знаки «+» и «–». Найдем минимальное значение груза среди клеток со знаками минус:

$$\theta = \min(550; 200; 100) = 100.$$

Чтобы получить новый план, осуществим перемещение груза θ по вершинам цикла: к перевозкам в клетках со значением «+» прибавим 100, а из перевозок в клетках со знаком «–» вычтем 100. Значения клеток, которые не вошли в цикл, остаются неизменными. В результате такого перемещения груза $\theta = 100$ получим новый план, записанный в виде таблицы.

Производители	Потребители					Объемы производства	Потенциалы U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	8	10	7 150	5 400	0 100	650	$U_1 = 0$
A_2	5 300	8 150	10	7	M 0	450	$U_2 = 1$
A_3	12	7 450	10	8	0 100	550	$U_3 = 0$
Объемы потребления	300	600	150	400	200	1650	–
Потенциалы V_j	$V_1 = 4$	$V_2 = 7$	$V_3 = 7$	$V_4 = 5$	$V_5 = 0$	–	

Новый план проверяем на оптимальность. Составляем систему уравнений для нахождения потенциалов:

$$\begin{cases} U_1 + V_3 = 7, \\ U_1 + V_4 = 5, \\ U_1 + V_5 = 0, \\ U_2 + V_1 = 5, \\ U_2 + V_2 = 8, \\ U_3 + V_2 = 7, \\ U_3 + V_5 = 0. \end{cases}$$

Решая систему при условии $U_1 = 0$, находим потенциалы:

$$U_1 = 0;\ U_2 = 1;\ U_3 = 0;\quad V_1 = 4;\ V_2 = 7;\ V_3 = 7;\ V_3 = 7;\ V_4 = 5;\ V_5 = 0$$

и записываем в таблицу. Вычисляем оценки $\Delta_{ij} = c_{ij} - (U_i + V_j)$ для свободных клеток:

$\Delta_{11} = 8-(4+0) = 4 > 0;$ $\Delta_{12} = 10-(7+0) = 3 > 0;$

$\Delta_{23} = 10-(7+1) = 2 > 0;$ $\Delta_{24} = 7-(5+1) = 1 > 0;$

$\Delta_{25} = M-(0+1) = M-1 > 0;$ $\Delta_{31} = 12-(4+0) = 8 > 0;$

$\Delta_{33} = 10-(0+1) = 3 > 0;$ $\Delta_{34} = 8-(5+0) = 3 > 0.$

Поскольку среди оценок нет отрицательных, то полученный план будет оптимальным. Матрица оптимальных перевозок имеет вид

$$X^{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 150 & 400 \\ 300 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Минимальные транспортные расходы по оптимальному плану составляют $z = 150\cdot 7 + 400\cdot 5 + 300\cdot 5 + 150\cdot 8 + 450\cdot 7 = 8900$ ден. ед. Нераспределенные лесоматериалы 200 м^3 остаются на предприятиях A_1 и A_3 в объемах по 100 м^3.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1. Предприятие выпускает продукцию четырех видов: B_1, B_2, B_3, B_4, для изготовления которой требуются ресурсы: трудовые, площадь и сырье. От реализации 1-й единицы каждого вида продукции предприятие получает прибыль соответственно 5, 4, 7, 6 ден. ед. Данные о расходах сырья на единицу продукции и запасах сырья приведены в таблице.

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции для разных видов				Запасы ресурсов, ед.
	Виды продукции				
	B_1	B_2	B_3	B_4	
Трудовые, чел.-ч	2	0,5	3	2	400
Площадь, м^2	4	2	5	2	500
Сырье, кг	3	2	4	4	120

Требуется определить состав и объем выпускаемой продукции для получения наибольшей прибыли. Записать линейную математическую модель задачи и привести ее к каноническому виду.

2. В цех по изготовлению некоторых изделий поступает материал в рулонах, в каждом из которых 10 м^2 материала. Для изготовления одного изделия требуются заготовки трех видов А, Б, В по $3{,}4\ \text{м}^2$, $5{,}4\,\text{м}^2$, $3{,}0\,\text{м}^2$ каждая соответственно. На каждое изделие требуется шесть заготовок вида А, четыре заготовки вида Б и семь заготовок вида В. Известны пять способов раскроя одного рулона. Количество заготовок, получаемых из каждого рулона при всех способах раскроя, записано в таблице.

Вид заготовок, шт.	Способы раскроя				
	1	2	3	4	5
А	2	1	1	0	0
Б	0	1	0	1	0
В	0	0	2	1	3

Необходимо определить, какое количество рулонов материала требуется раскроить каждым из указанных способов для изготовления 100 изделий, чтобы отходы были минимальными. Записать линейную математическую модель задачи.

Предварительно нужно найти величины отходов при каждом способе раскроя и количество заготовок каждого вида, требуемых для изготовления 100 изделий.

3. На предприятии имеются бревна длиной 5 м, которые необходимо разрезать на заготовки длиной 2,3 м в количестве 100 шт., 2,0 м − 150 шт., 1,5 м − 200 шт.

Записать возможные варианты раскроя бревен и линейную математическую модель задачи для отыскания оптимального плана раскроя материала, который обеспечивает минимальные отходы, при условии выполнения плана по выходу заготовок.

4. На предприятии имеются бревна длиной 6 м, которые необходимо распилить на заготовки длиной 2,5 м в количестве 400 шт., 2,1 м − 250 шт., 1,8 м − 200 шт.

Записать возможные варианты раскроя бревен и линейную математическую модель задачи для отыскания оптимального плана раскроя материала, который обеспечивает минимальные отходы, при условии выполнения плана по выходу заготовок.

5. (Задача о смесях). Завод по производству дорожной цементогрунтовой смеси использует три вида сырья A_1 – цемент, A_2 – гравий, A_3 – песок и может выпускать три вида смесей B_1, B_2, B_3. В течение планируемого периода завод должен освоить не менее 640 т сырья A_1 и 800 т сырья A_2, при этом сырья A_3 может быть израсходовано не более 860 т.

Записать линейную математическую модель данной производственной задачи, чтобы при указанных ограничениях на сырье, себестоимость выпущенной продукции была минимальной. Данные о нормах расхода и себестоимости смесей даны в таблице.

Вид сырья	Норма расхода сырья на 1 т смеси, усл. ед.		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1,0	4,3	2,6
A_2	5,0	1,5	3,0
A_3	3,0	3,9	4,3
Себестоимость 1 м^3 смеси, ден. ед.	18	15	15

6. Предприятие выпускает два вида продукции A_1 и A_2. Для их производства требуется затратить такие производственные ресурсы, как сырье, физический и управленческий труд. Затраты ресурсов на единицу продукции каждого вида, ежедневный объем имеющихся ресурсов, а также прибыль на единицу продукции приведены в таблице.

Тип ресурсов	Затраты ресурсов на единицу продукции вида		Объемы ресурсов
	A_1	A_2	
Сырье, кг	8	25	800
Физический труд, чел.-ч	8	5	640
Управленческий труд, чел.-ч	1	5	145
Прибыль на ед. продукции, ден. ед.	80	50	–

Составить план ежедневного выпуска продукции, при котором получаемая прибыль будет максимальной. Рекомендуется записать линейную модель задачи и решить графическим методом.

7. Из Минска в Гродно необходимо перевезти оборудование трех типов: 54 единицы 1-го типа, 34 единицы 2-го типа, 108 единицы 3-го типа. Для перевозки оборудования завод может заказать два вида транспорта А и Б. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определенный вид транспорта, а также затраты, связанные с эксплуатацией транспорта, приведены в таблице.

Тип оборудования	Вид транспорта	
	А	Б
1	18	3
2	4	3
3	15	8
Затраты, ден. ед.	8	22

Спланировать перевозки так, чтобы транспортные расходы были минимальны. Рекомендуется записать линейную модель задачи и решить графическим методом.

8. Предприятие изготавливает изделия двух видов *A* и *B*. Для производства изделий оно располагает сырьевыми ресурсами трех видов *C*, *D* и *E* в объемах 600, 480 и 240 ед. соответственно. Нормы расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида известны и представлены в таблице

Ресурсы	Изделия	
	A	*B*
C	10	8
D	8	8
E	3	8

Прибыль от реализации одного изделия вида *A* составляет 40 ден. ед., изделия вида *B* – 50 ден. ед. Требуется найти объемы производства изделий *A* и *B*, обеспечивающие максимальную прибыль, для чего нужно записать линейную математическую модель задачи и решить графическим методом.

9. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры вырезают заготовки трех видов. Раскрой заготовок ведется двумя способами. Исходные данные по выходу заготовок в зависимости от способа раскроя, а также необходимое количество заготовок приведены в таблице.

Вид заготовок	Способы раскроя		Количество заготовок, шт.
	1	2	
1	6	3	24
2	5	6	34
3	8	3	24
Величина отхода	5	7	–

Требуется найти, сколько листов и по какому способу нужно раскроить, чтобы было получено не менее требуемого количества заготовок при минимальных отходах.

10. Графическим методом решить ЗЛП:

$$z = x_1 + 3x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 4x_2 \geq 27, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

11. Графическим методом решить ЗЛП:

$$z = 10x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 33, \\ x_1 \quad + 6x_2 \ge 14, \\ 5x_1 - 4x_2 \ge 20, \\ x_1 \quad - 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12. Графическим методом решить ЗЛП:

$$z = -2x_1 + 5x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ 5x_1 \quad + 6x_2 \le 31, \\ 3x_1 \quad + 8x_2 \ge 23, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

13. Три завода-производителя A_1, A_2, A_3 выпускают однородную продукцию в количествах 400, 300, 600 ед. соответственно, которая отправляется трем предприятиям B_1, B_2, B_3 с потребностями 350, 550 и 400 ед. соответственно. Стоимость перевозки единицы продукции от производителей к потребителям задается матрицей тарифов

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить первоначальный базисный план методом «северо-западного угла» и методом «минимальной стоимости». Найти стоимости перевозок по каждому из планов и разность в стоимости перевозок.

14. Три завода-производителя A_1, A_2, A_3 выпускают однородную продукцию в количествах 200, 300, 500 ед. соответственно, которая отправляется четырем предприятиям B_1, B_2, B_3, B_4 с потребностями 150, 250, 300 и 300 ед. соответственно. Стоимость перевозки единицы продукции от производителей к потребителям задается матрицей тарифов

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить первоначальный базисный план методом «северо-западного угла» и методом «минимальной стоимости». Найти стоимости перевозок по каждому из них и выяснить, который из них более выгодный.

15. Три лесхоза $Л_1, Л_2, Л_3$ производят технологическую щепу в количествах 300, 300, 400 т соответственно, которая отправляется на заводы А, Б и В. Потребности этих заводов 250, 550 и 200 т соответственно. Стоимость перевозки 1 т щепы от лесхозов до потребителей задается матрицей тарифов

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Методом потенциалов найти оптимальный план перевозок, при котором транспортные расходы будут минимальны.

16. Имеется четыре леспромхоза $Л_1, Л_2, Л_3, Л_4$ с запасами пиловочника 300, 400, 300, 400 тыс. м^3 соответственно, который перерабатывают три лесопильных завода с объемами переработки 650, 450, 400 тыс. м^3. Стоимость перевозки 1 тыс. м^3 пиловочника от леспромхозов до лесопильных заводов задается матрицей тарифов

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется составить экономико-математическую модель данной открытой транспортной задачи, пользуясь которой методом потенциалов найти оптимальный план перевозок, при котором транспортные расходы будут минимальны. Найти минимальные транспортные расходы и указать завод, которому не хватит пиловочника.

17. В городе имеются четыре хлебозавода, которые снабжаются мукой тремя мелькомбинатами. Все необходимые данные: стоимости перевозок, объемы производства и потребления муки, план существующих перевозок записаны в таблице планирования.

Мелькомбинаты	Хлебозаводы				Суточное производство муки, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
№ 1	4 15	2	4 10	7	25
№ 2	7	6	6 2	8 18	20
№ 3	2 15	2 20	3	6	35
Суточная потребность в муке, т.	30	20	12	18	80

Возможно ли путем перераспределения поставок уменьшить транспортные расходы, и если да, то насколько?

18. Три завода-производителя A_1, A_2, A_3 выпускают однородную продукцию в количествах 300, 400, 700 ед. соответственно, которая отправляется трем потребителям с потребностями 350, 450 и 500 ед. соответственно. Стоимость перевозки единицы продукции от производителей к потребителям задается матрицей тарифов

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Методом потенциалов найти оптимальный план перевозок, при котором транспортные расходы будут минимальны, а продукция производителя A_2 будет полностью вывезена.

Ответы

1. Математическая модель в нормальной форме

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 0{,}5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 400, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 500, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 120. \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}, \end{cases}$$

где $x_j, j = \overline{1,4}$ – количество выпускаемой продукции j-го типа.

Математическая модель в канонической форме

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 400, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_6 = 500, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_7 = 120, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,7}, \end{cases}$$

где $x_j, j = 5,6,7$ – свободные переменные.

2. При раскрое 1-м способом отходы равны 3,2 $м^2$; 2-м – 1,2 $м^2$; 3-м – 0,6 $м^2$; 4-м – 1,6 $м^2$; 5-м – 1,0 $м^2$. Количество заготовок вида А – 600, вида Б – 150, вида В – 200 шт.

Линейная математическая модель задачи

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 600, \\ x_2 + x_4 = 150, \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 200, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,5}, \end{cases}$$

$$z = 3,2x_1 + 1,2x_2 + 0,6x_3 + 1,6x_4 + 1,0x_5 \to \min,$$

где x_j – количество рулонов, раскроенных по j-му способу, $j = \overline{1,5}$.

3. Возможные варианты раскроя бревен и остатки при раскрое каждым записаны в таблице.

Длина заготовки, м	Варианты раскроя бревна 5 м						Количество заготовок, шт.
	1	2	3	4	5	6	
2,3	2	1	1	0	0	0	100
2,0	0	1	0	2	1	0	150
1,5	0	0	1	0	2	3	200
Остаток, м	0,4	0,7	1,2	1,0	0	0,5	–

Линейная математическая модель задачи

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 100, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 150, \\ x_3 + 2x_5 + 3x_6 = 200, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,6}, \end{cases}$$

$$z = 0,4x_1 + 0,7x_2 + 1,2x_3 + 1,0x_4 + 0x_5 + 0,5x_6 \to \min,$$

где x_j – количество бревен, разрезанных по j-му варианту, $j = \overline{1,6}$.

4. Возможные варианты раскроя бревен и остатки при раскрое каждым записаны в таблице.

Длина заготовки, м	Варианты распиловки бревна длиной 6 м						Количество заготовок, шт.
	1	2	3	4	5	6	
2,5	2	1	1	0	0	0	400
2,1	0	1	0	2	1	0	250
1,8	0	0	1	1	2	3	200
Остаток, м	1,0	1,4	1,7	0	0,3	0,6	–

Линейная математическая модель задачи

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 400, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 250, \\ x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 200, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}, \end{cases}$$

$$z = 1{,}0x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}7x_3 + 0x_4 + 0{,}3x_5 + 0{,}6x_6 \to \min,$$

где x_j – количество бревен, разрезанных по j-му варианту, $j = \overline{1,6}$.

5. Целевая функция

$$z = 18x_1 + 15x_2 + 15x_3 \to \min.$$

Ограничения на ресурсы

$$\begin{cases} x_1 + 4{,}3x_2 + 2{,}6x_3 \ge 640, \\ 5x_1 + 1{,}5x_2 + 3x_3 \ge 800, \\ 3x_1 + 3{,}9x_2 + 4{,}3x_3 \le 860, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}, \end{cases}$$

где $x_j, j = \overline{1,3}$ – количество тонн смеси B_j.

6. Продукции A_1 – 75 ед., продукции A_2 – 8 ед. Максимальная прибыль будет 6400 ден. ед. **7.** 4 ед. транспорта А и 6 ед. транспорта Б. Минимальные транспортные расходы 164 ден. ед. **8.** Математическая модель имеет вид

$$z = 40x_1 + 50x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 8x_2 \le 600, \\ 8x_1 \ \ + 8x_2 \le 480, \\ 3x_1 \ \ \ + 8x_2 \le 240, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

где – x_1 количество изделий вида A, x_2 – количество изделий вида B.

Максимальная прибыль равна 2600 ден. ед., при выпуске 40 изделий вида A и 20 изделий вида B. **9.** 2 листа по первому способу и 4 листа по второму способу. **10.** $x_1^{\text{опт}} = 3,\ x_2^{\text{опт}} = 6,\ z_{\min} = 21.$ **11.** $x_1^{\text{опт}} = 12,\ x_2^{\text{опт}} = 3,\ z_{\max} = 129.$ **12.** $x_1^{\text{опт}} = 5,\ x_2^{\text{опт}} = 1,\ z_{\min} = -5.$ **13.** В таблице записан первоначальный базисный план, построенный методом «северо-западного угла». Стоимость перевозок равна 4350 ден. ед.

Производи тели	Потребители			Объемы производства
	B_1	B_2	B_3	–
A_1	6 350	5 50	2	400
A_2	1	4 300	4	300
A_3	3	2 200	1 400	600
Объемы потребления	350	550	400	1300

В следующей таблице

Производители	Потребители			Объемы производства
	B_1	B_2	B_3	
A_1	6 50	5 350	2	400
A_2	1 300	4	4	300
A_3	3	2 200	1 400	600
Объемы потребления	350	550	400	1300

записан один из первоначальных базисных планов, построенный методом «минимальной стоимости». Стоимость перевозок равна 3150 ден. ед.

Разность в стоимости перевозок составляет 1200 ден. ед. Более выгодным является план построенный методом «минимальной стоимости».

14. В таблице записан первоначальный базисный план, построенный методом «северо-западного угла». Стоимость перевозок равна 3300 ден. ед.

Производители	Потребители				Объемы производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 150	4 50	2	3	200
A_2	1	2 200	4 100	5	300
A_3	3	4	1 200	6 300	500
Объемы потребления	150	250	300	300	1000

В следующей таблице записан один из первоначальных базисных планов, построенный методом «минимальной стоимости». Стоимость перевозок равна 3050 ден. ед.

Производители	Потребители				Объемы производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4 100	2	3 100	200
A_2	1 150	2 150	4 100	5	300
A_3	3	4	1 300	6 200	500
Объемы потребления	150	250	300	300	1000

Разность в стоимости перевозок составляет 250 ден. ед. Более выгодным является план построенный методом «минимальной стоимости».

15. $X^{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 250 & 50 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_{\min} = 2450$ ден. ед.

16. $$X^{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 0 & 0 & 300 \\ 350 & 50 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_{\min} = 2650 \text{ ден. ед.}$$

Второму лесопильному заводу не хватит пиловочника в объеме 100 тыс. м^3.

17. Данный план не является оптимальным. Его транспортные расходы составляют 326 ден. ед.

$$X^{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 30 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_{\min} = 291 \text{ ден. ед.}$$

Выгода при переходе на новый план перевозок составляет 35 ден. ед.

18. $$X^{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 300 \\ 350 & 50 & 0 \\ 0 & 400 & 300 \end{pmatrix}, \quad z_{\min} = 4000 \text{ ден. ед.}$$

Невывезенной в объеме 100 ед. будет продукция производителя A_3.

Тема 8 ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

8.1. Основные понятия теории массового обслуживания

При рассмотрении задач линейного программирования изучаются так называемые детерминированные модели, которые описывают процессы, определяемые заранее известными факторами. Модели, содержащие случайные величины, называются стохастическими. В стохастических задачах исследования операций часто затруднительно даже построение математической модели, не говоря уже об оптимизации. Однако в некоторых частных случаях такую математическую модель удается построить. Это возможно в случаях, когда процесс представляет собой (точно или приближенно) ***марковский процесс*** (названный в честь Маркова А. А. (1856–1922 гг.), который впервые их изучил.

Первоначально обратимся к ***понятию случайного процесса***. Пусть имеется некоторая система S, которая с течением времени меняет свое состояние (переходит из одного в другое), причем заранее неизвестным случайным образом. Тогда в системе происходит случайный процесс. Под системой можно понимать что угодно: техническое устройство, группу таких устройств, предприятие, живой организм, технологический процесс и т. д.

В качестве примера рассмотрим работу раскряжевочной установки (машина, которая распиливает хлыст или бревно на заготовки нужной длины). Для процесса раскряжевки характерны следующие состояния:

S_0 – установка исправна и не работает (простаивает из-за отсутствия хлыстов);

S_1 – установка работает (осуществляет раскряжевку хлыстов);

S_2 – установка неисправна.

Случайный процесс, протекающий в системе, называется ***марковским,*** если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, как система пришла в это состояние.

Иначе говоря, для марковского процесса «будущее» зависит только от «настоящего» и не зависит от «прошлого». На практике встречаются процессы, которые, если не в точности марковские, то могут быть в некотором приближении рассмотрены как таковые. В сущности, любой процесс можно рассматривать как марковский, если все параметры из «*прошлого*», от которых зависит «будущее», включить в «настоящее».

Поясним на примере. Рассмотрим техническое устройство. В какой-то момент времени t_0 данное устройство еще исправно и нас интересует вероятность того, что оно проработает еще время τ. Если за настоящее состояние системы считать просто «*система исправна*», то процесс, безусловно, не марковский, потому что вероятность того, что устройство не откажет за время τ, зависит в общем случае от того, сколько времени оно уже проработало и когда был последний ремонт. Если оба эти параметра (общее время работы и время после последнего ремонта) включить в настоящее состояние системы, то процесс уже можно считать марковским. Однако такое «*обогащение настоящего*» не всегда целесообразно, так как ведет к увеличению параметров системы.

Важное место среди случайных процессов занимают марковские процессы с дискретными состояниями. Процесс называется ***процессом с дискретными состояниями***, если его возможные состояния можно перечислить (пронумеровать) и переход системы из состояния в состояние происходит «*скачком*», т. е. практически мгновенно.

Различают два типа марковских случайных процессов: с дискретным временем и непрерывным временем.

Марковским случайным процессом с дискретным временем называется процесс, у которого переходы из одного состояния в другое возможны в строго определенные заранее известные моменты времени $t_1, t_2, ... t_k, ...$.

Такие процессы редко встречаются при анализе систем массового обслуживания, поэтому мы их рассматривать не будем.

Марковским случайным процессом с непрерывным временем называется процесс, у которого моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны, т. е.

переход может осуществиться в принципе в любой момент. Так, в примере с раскряжевочной установкой процесс является с дискретными состояниями (три состояния S_0, S_1, S_2) и непрерывным временем. Мы не можем заранее точно указать момент, когда установка испортится или привезут хлысты.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой процесса – так называемым ***графом состояний.*** Возможные состояния обозначаются квадратиками или кружочками, а возможные переходы – стрелками. Так, в примере с раскряжевочной установкой граф состояний будет иметь вид, представленный на рис. 8.1.

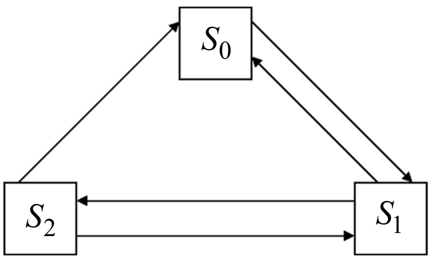


Рис. 8.1. Граф состояния раскряжевочной установки

Раскряжевочная установка из состояния S_1 (установка работает) может перейти в состояние S_0 (установка исправна и не работает) или S_2 (установка неисправна). В то же время из состояния S_2 (установка неисправна) она может перейти в состояние S_0 или S_1, а вот из состояния S_0 (установка исправна и не работает) перейти в состояние S_2 (установка неисправна) она не может.

8.2. Поток случайных событий. Пуассоновский поток событий

Одним из важнейших понятий теории массового обслуживания (ТМО) является понятие потока событий.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени, например поток лесовозов, прибывающих на нижний склад, поток телефонных звонков, поступающих абоненту и т. д.

Поток событий можно наглядно изобразить рядом точек на оси времени Ot (рис. 8.2).

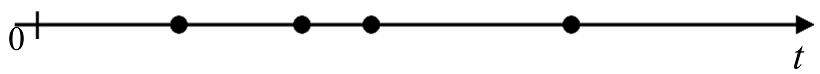


Рис. 8.2. Схема потока событий

Говоря о потоке событий, нужно иметь в виду, что здесь у термина «*событие*» иное значение, отличное от ранее рассматриваемого в теории вероятностей, где событие – это исход опыта, обладающий той или иной вероятностью. Здесь же события, образующие поток, сами вероятностью не обладают. В частности, рассматривая поток деревьев, поступающих на обработку, нет смысла говорить о вероятности поступления дерева на обработку. Ясно, что рано или поздно дерево на обработку поступит. С потоком событий можно связывать различные случайные события, например событие A состоит в том, что в течение времени от t_0 до $t_0+\tau$ на обработку поступит три бревна и т. д. Вероятности таких событий можно вычислять.

В ТМО события обычно называют заявками или требованиями и, соответственно, рассматривают потоки заявок или требований.

Потоки событий различают между собой по их внутренней структуре: по законам распределения интервалов времени между соседними событиями, их взаимной зависимости или независимости.

Два потока называются ***независимыми***, если моменты появления событий одного потока не зависят от того, в какие моменты времени появляются события второго потока. В противном случае потоки будут зависимы. Например, поток пассажиров, входящих на станцию метро, и поток пассажиров, выходящих со станции метро, будут независимы. А вот поток прибытия поездов на станцию и поток пассажиров, выходящих со станции метро, будут зависимы между собой, так как последний обусловлен прибытием поезда.

Самым простым потоком с точки зрения его построения является «*регулярный поток*». Поток событий называется ***регулярным***, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени. Строго регулярных потоков в природе не существует, так как моменты появления событий всегда содержат элемент случайности. Однако существуют «*практически регулярные потоки*». Например, поток изменений минутной стрелки на электронных часах. Регулярный поток представляет определенный интерес как предельный случай для других потоков. Мы будем рассматривать нерегулярные потоки.

Остановимся на основных характеристиках потоков.

Важной характеристикой потока является его ***интенсивность*** λ – среднее число событий, приходящихся на единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной, так и переменной, зависящей от времени: $\lambda = \lambda(t)$. Например, интенсивность движения городского транспорта зависит от времени суток: наибольшая в часы «*пик*» и наименьшая в ночное время.

Поток событий называется ***стационарным***, если вероятность попадания того или иного числа событий на отрезок времени длиной τ зависит только от его длины и не зависит от того, где на оси времени Ot он расположен. В частности, интенсивность λ стационарного потока событий должна быть постоянной. Это, однако, не означает, что фактическое число событий, появляющихся в единицу времени, постоянно. Стационарный поток неизбежно имеет какие-то точки «*сгущения*» и «*разряжения*».

Поток событий называется ***потоком без последействия***, если события, составляющие его, появляются в случайные моменты времени независимо друг от друга. Другими словами, поток будет ***потоком без последействия***, если для любых двух непересекающихся отрезков времени τ_1 и τ_2 число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попадет на другой (рис. 8.3).

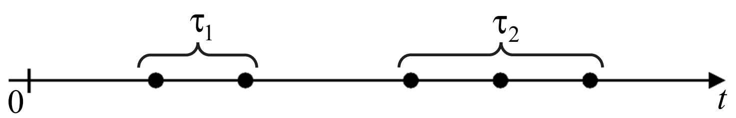


Рис. 8.3. Схема потока событий без последействия

Например, поток лесовозов, прибывавших под разгрузку краном, является потоком с последействием, так как разгрузка пребывавшего лесовоза не начнется, пока не будут разгружены лесовозы, стоящие в очереди перед ним. А вот поток отправляющихся после разгрузки лесовозов будет потоком без последействия, так как он не зависит от того, сколько и в какое время перед ним ушло лесовозов после разгрузки.

Поток событий называется ***ординарным***, если события в нем появляются поодиночке, а не группами. Например, поток прибывающих на вокзал поездов является ординарным, а вот поток прибывающих вагонов в составе поезда – неординарный.

С математической точки зрения ординарность потока означает, что вероятность попадания на участок Δt двух или более событий есть величина бесконечно малая, более высокого порядка малости, чем Δt, по сравнению с вероятностью попадания на него ровно одного события.

Среди потоков событий особое место занимает так называемый «*пуассоновский поток*», обладающий, по сравнению с другими потоками, рядом замечательных свойств, существенно облегчающих решение прикладных задач ТМО.

Поток событий называется ***пуассоновским***, если он обладает двумя свойствами – *ординарностью* и *отсутствием последействия*. Это название связано с тем, что в данном случае число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени τ, распределено по закону Пуассона:

$$P(k,\tau)=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau},$$

где $P(k,\tau)$ – вероятность того, что за время τ появится ровно k событий; λ – интенсивность потока.

В большинстве исследований прикладного характера делается предположение, что потоки событий, определяющие различные случайные процессы, являются пуассоновскими. Делается такое допущение не только потому, что при этом упрощаются исследования, но главным образом потому, что во многих случаях оно близко к истине. Дело в том, что пуассоновские потоки в определенном смысле являются предельными для различных потоков событий. Например, если поток получается в результате «*сложения*» (или взаимного «*наложения»*) достаточно большого числа потоков различной структуры, то суммарный поток в весьма широком диапазоне допущений будет близок к пуассоновскому. ***Сложение*** двух потоков Π_1 и Π_2 состоит в том, что все моменты появления событий в этих потоках относятся к одной оси времени Ot, на которой отмечаются моменты появления событий в суммарном потоке $\Pi_1+\Pi_2$ (рис. 8.4).

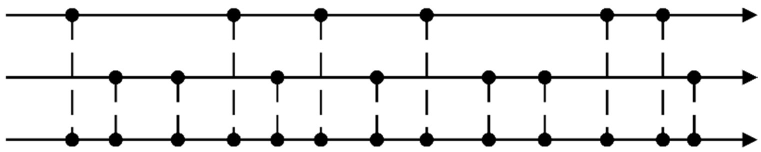


Рис. 8.4. Сложение потоков событий

Часто бывает, что техническое устройство состоит из многих элементов, работа каждого из которых необходима для работы всего устройства. В этом случае поток отказов технического устройства будет складываться из потока отказов его отдельных элементов. Поэтому поток отказов технического устройства будет близок к пуассоновскому потоку.

Поток лесовозов является практически пуассоновским, так как они осуществляют вывозку со значительного числа лесосек, осваивающихся независимо друг от друга. Поток машин на магистрали будет также практически пуассоновским, так как он состоит из отдельных потоков машин, выезжающих на магистраль с примыкающих к ней дорог.

С другой стороны, если взять произвольный поток и из него случайным образом выбрасывать события, то после нескольких таких «*разрежений*» полученный поток событий будет также близок к пуассоновскому. На практике очень часто фактически имеет место «*сложение*» или «*случайное разряжение*» потоков событий, поэтому пуассоновские потоки событий находят широкое применение для решения прикладных задач.

Пуассоновский поток может быть как стационарным, так и нестационарным, если интенсивность является функцией от времени: $\lambda = \lambda(t)$.

Стационарный пуассоновский поток называется ***простейшим.*** Так он назван потому, что применение простейших потоков событий приводит к наиболее простым результатам в ТМО.

Таким образом, поток событий называется ***простейшим***, если он обладает тремя свойствами: ***стационарностью, ординарностью и отсутствием последействия.***

Для простейшего потока с интенсивностью λ интервал T между соседними событиями имеет показательное распределение с плотностью $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0.$

Известно что $M(T) = \sigma(T) = \dfrac{1}{\lambda}.$

Предельная теорема для суммарного потока утверждает сходимость суммы ***независимых, ординарных, стационарных*** потоков к ***простейшему потоку.***

При этом должны быть выполнены следующие условия: среди суммируемых потоков не должно быть потоков с очень большой интенсивностью (по сравнению с суммарной интенсивностью всех остальных); интенсивности складываемых потоков не должны становиться по мере увеличения номера потока исчезающе малыми. Кроме этого, должны быть наложены некоторые несущественные ограничения на последействие внутри каждого потока, которые мы не будем уточнять.

Здесь важно отметить, что сходимость суммарного потока к простейшему осуществляется очень быстро. Практически можно считать, что сложение четырех-пяти стационарных, ординарных, независимых потоков, сравнимых по интенсивности, достаточно для того, чтобы суммарный поток был близок к простейшему.

Из всего вышеизложенного следует, что многие потоки событий, возникающие на практике и фигурирующие в задачах массового обслуживания, можно приближенно считать простейшими.

8.3. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний

Рассматриваются *марковские* процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Будем считать, что все переходы системы S из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий (поток вызовов, поток отказов, поток восстановлений и т. д.). Доказано, что е***сли все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, пуассоновские, то процесс, протекающий в системе, будет марковским***. Если система S находится в каком-то состоянии S_i из которого есть непосредственный переход в другое состояние S_j (стрелка на графе состояний направлена из S_i в S_j), то это означает, что на систему, пока она находится в состояние S_i действует поток событий с интенсивностью $\lambda_{ij}(t)$, переводящий ее в состояние S_j. Как только появится первое событие этого потока, то система «*скачком*» переходит из состояния S_i в состояние S_j.

Для удобства составления уравнений Колмогорова на графе состояний у каждой стрелки проставляют интенсивность потока событий, который переводит систему по данной стрелке. Такой граф состояний называется ***размеченным графом.*** Так, размеченный граф для работы раскряжевочной установки имеет вид, представленный на рис. 8.5.

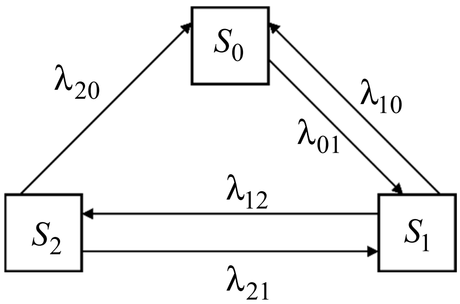


Рис. 8.5. Размеченный граф состояний раскряжевочной установки

Здесь λ_{01} – интенсивность поступления хлыстов; λ_{10} – интенсивность обработки хлыстов; λ_{12} – интенсивность отказов установки; $\lambda_{21} = \lambda_{20}$– интенсивность восстановления работоспособности раскряжевочной установки.

Имея размеченный граф, легко построить математическую модель данного процесса.

Пусть имеется система S с n возможными состояниями $S_1, S_2, ..., S_n$.

$P_i(t)$ – вероятность того, что в момент t система находится в состоянии S_i, называется вероятностью i-го состояния. Очевидно, что для любого момента сумма всех вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1.$$

По размеченному графу состояний можно найти вероятности $P_i(t)$ как функции времени. Для этого составляются дифференциальные уравнения Колмогорова, в которых неизвестными являются вероятности состояний $P_i(t)$.

Пусть в момент времени t система S находится в состоянии S_i. Рассмотрим на оси Ot момент времени t и примыкающий к нему элементарный участок времени Δt и найдем вероятность того, что за время Δt система под действием потока с интенсивностью $\lambda_{ij}(t)$ перейдет из состояния S_i в состояние S_j. Это вероятность того, что за время Δt появится хотя бы одно событие потока, переводящее систему из состояния S_i в состояние S_j.

Для простейшего потока эта вероятность с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка малости по сравнению с Δt равна $\lambda ij \cdot \Delta t$.

Следовательно, вероятность перехода системы из состояния S_i в состояние S_j за время Δt равна произведению интенсивности переводящего потока на время Δt.

Методику вывода уравнений Колмогорова продемонстрируем на работе раскряжевочной установки, размеченный граф состояний которой изображен на рис. 8.5. Здесь все потоки, переводящие систему из состояния в состояние, простейшие.

Пусть в момент времени t система находится в состоянии S_0. Времени t придадим приращение Δt и найдем $P_0(t+\Delta t)$ – вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ система будет находиться в состоянии S_0. Как это может произойти? Очевидно двумя способами:

1) система в момент времени t была в состоянии S_0 и за время Δt не вышла из него;

2) система в момент времени t была в состоянии S_1 или S_2 и за время Δt перешла из этих состояний в состояние S_0.

Найдем вероятность первого способа. Вероятность того, что в момент времени t система была в состоянии S_0, равна $P_0(t)$. Эту вероятность умножаем на вероятность того, что за время Δt система не перейдет в состояние S_1.

Вероятность того, что за время Δt система не выйдет из состояния S_0 (событие, противоположное событию «система выйдет из состояния S_0»), равна $1-\lambda_{01}\Delta t$. Отсюда вероятность первого способа равна $P_0(t)\cdot(1-\lambda_{01}\Delta t)$.

Вероятность второго способа равна сумме вероятности $P_1(t)$ – в момент времени t система была в состоянии S_1, умноженной на вероятность $\lambda_{10}\Delta t$ – система за время Δt перешла из состояния S_1 в состояние S_0 и вероятности $P_2(t)$ – в момент времени t система была в состоянии S_2, умноженной на вероятность $\lambda_{20}\Delta t$ – система за время Δt перешла из состояния S_2 в состояние S_0, т. е. $P_1(t)\lambda_{10}\Delta t+$ $+P_2(t)\lambda_{20}\Delta t$.

Таким образом, имеем

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\cdot(1-\lambda_{01}\Delta t) + P_1(t)\lambda_{10}\Delta t + P_2(t)\lambda_{20}\Delta t.$$

Раскрыв скобки, перенеся $P_0(t)$ в левую часть и разделив на Δt, получим

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t) + \lambda_{20}P_2(t).$$

Переходя в последнем уравнении к пределу при $\Delta t \to 0,$ получаем дифференциальное уравнение Колмогорова для вероятности $P_0(t)$ состояния S_0:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t) + \lambda_{20}P_2(t).$$

Рассуждая аналогично, получаем два других уравнения для вероятностей $P_1(t)$ и $P_2(t)$. Добавим к ним условие нормировки:

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1.$$

Система уравнений Колмогорова для раскряжевочной установки имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t) + \lambda_{20}P_2(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{10}+\lambda_{12})P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12}P_1(t) - (\lambda_{20}+\lambda_{21})P_2(t), \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1. \end{cases} \tag{8.1}$$

Уравнения Колмогорова (названы в честь академика Колмогорова А. Н. (1903–1987 гг.), предложившего такой метод анализа марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем), удобно составлять, пользуясь размеченным графом состояний и следующим мнемоническим правилом.

Правило. Чтобы записать уравнение Колмогорова для i-го состояния, нужно в левой части уравнения записать производную $\dfrac{dP_i(t)}{dt}$, в правой части уравнения – сумму произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивность соответствующих потоков минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного i-го состояния.

Таким образом, каждому из состояний $S_1, S_2, ..., S_n$ соответствует линейное дифференциальное уравнение, а для всех состояний получаем систему из n линейных дифференциальных уравнений с n неизвестными: одно из них, любое, можно отбросить, пользуясь тем, что

$$P_1(t) + P_2(t) + \cdots + P_n(t) = 1.$$

Чтобы решить систему уравнений Колмогорова, нужно задать начальные условия. Так, если мы точно знаем, что в начальный момент $t = 0$ система находилась в состоянии S_i, то начальные условия имеют вид

$$P_i(0) = 1, P_j(0) = 0, j \neq i.$$

Заметим, что если процесс, протекающий в системе, *не является марковским* с *непрерывным временем*, то обыкновенные дифференциальные уравнения для вероятностей состояний *составить нельзя.*

8.4. Финальные вероятности. Эргодические марковские случайные процессы

Во многих случаях, когда процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, возникает вопрос о предельном поведении вероятностей $P_i(t)$ при $t \to +\infty$. Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими (т. е. стационарными пуассоновскими, $\lambda_{ij} = \text{const}$), в некоторых случаях существуют ***финальные (предельные) вероятности*** состояний:

$$P_i = \lim_{t \to +\infty} P_i(t), i = \overline{1, n},$$

не зависящие от того, в каком состоянии система S находилась в начальный момент. Это значит, что с течением времени в системе S устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний уже не меняются. В этом предельном режиме каждая финальная вероятность может быть истолкована как среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Система, для которой существуют финальные вероятности, называется ***эргодической***, а соответствующий финальный процесс – ***эргодическим***.

Для существования финальных вероятностей требуется выполнение некоторых условий, проверить которые можно по графу состояний.

Процесс, протекающий в системе, называется ***транзитивным,*** если граф состояний не имеет ни одного отдельного состояния без выхода и без входа и ни одной группы состояний без выхода и без входа.

Другими словами, для любого состояния S_i можно найти путь, по которому можно добраться до любого другого состояния S_j и вернуться в исходное состояние S_i. Это утверждение вовсе не означает, что каждое состояние системы должно непосредственно соединяться с каждым другим состоянием.

На (рис. 8.6, *а*) приведен граф состояний транзитивного процесса, а на (рис. 8.6, *б*) – нетранзитивного процесса, так как S_3 на этом рисунке не является состоянием без выхода.

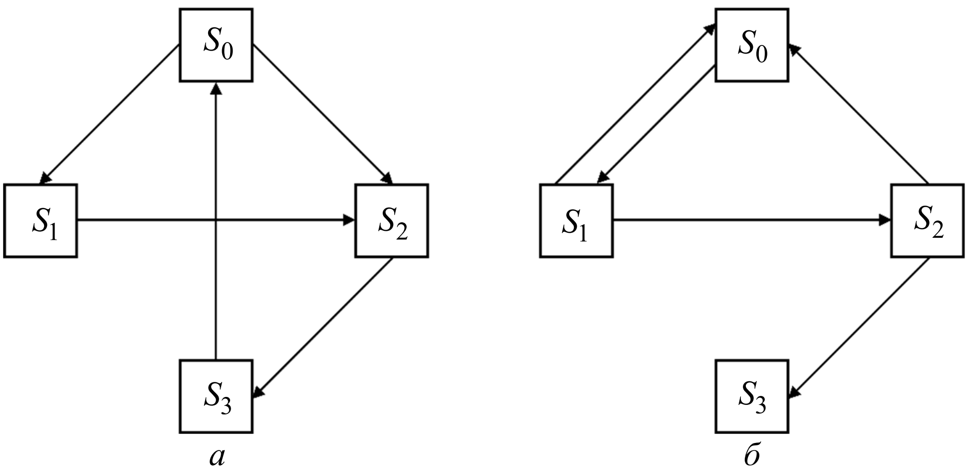


Рис. 8.6. Примеры графов транзитивного и нетранзитивного процессов

Транзитивность процесса является необходимым условием того, что система обладает эргодическим свойством. Если процесс нетранзитивен, то система по истечении достаточного времени окажется в одной из групп состояний или в одном состоянии без выхода. Однако для того чтобы процесс был эргодическим, этого недостаточно.

Нужно, чтобы процесс, кроме того, протекал однородно во времени, т. е. чтобы вероятность P_{ij} перехода из состояния S_i в состояние S_j за время τ зависела не от того, в какой момент времени t_0 система находилась в состоянии S_i, а лишь от величины τ, т. е. $P_{ij}(t_0,\tau) = P_{ij}(\tau)$.

Для того чтобы марковский случайный процесс был однородным, необходимо, чтобы все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, были стационарными пуассоновскими, т. е. простейшими потоками.

Теорема Маркова утверждает, что любой транзитивный однородный марковский процесс с конечным числом состояний обладает эргодическим свойством, т. е. существуют финальные вероятности.

Системы, обладающие эргодическим свойством, называются ***эргодическими системами.***

Все время работы эргодической системы можно разбить условно на два интервала (рис. 8.7): интервал $(0, t_\text{п})$, который обычно называется ***интервалом переходного режима*** работы системы и $(t_\text{п}, +\infty)$ – ***интервал стационарного режима*** работы системы; величина $t_\text{п}$ – время переходного режима системы. Время переходного режима системы можно определить из следующего условия: для любого $t > t_\text{п}$, $|P_i(t) - P_i| < \varepsilon, i = 0, 1, \ldots, n,$ где величина ε задается исследователем. Причем чем меньше значение этой величины, тем больше в этом случае будет время переходного режима функционирования системы $t_\text{п}$.

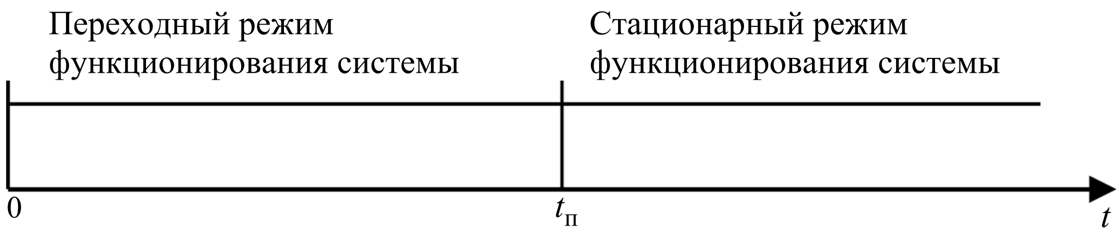


Рис. 8.7. Схема переходного и стационарного режимов

Поскольку в стационарном режиме предельные вероятности постоянны (не зависят от времени), то их производные равны нулю:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \frac{dP_i}{dt} = 0.$$

Следовательно, для стационарного режима работы системы S дифференциальные уравнения Колмогорова превращаются в систему однородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. Чтобы решить эту систему алгебраических уравнений, необходимо одно (любое) из этих уравнений заменить нормировочным условием $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$. Таким образом, финальные вероятности находятся из решения системы алгебраических уравнений.

☒ *ПРИМЕР.* Рассмотрим работу раскряжевочной установки. Она может находиться в одном из трех состояний S_0, S_1, S_2. Пусть интенсивности потоков, которые переводят устройства из одного состояния во второе, известны: $\lambda_{01} = 2$; $\lambda_{10} = 4$; $\lambda_{12} = 3$; $\lambda_{21} = 2$; $\lambda_{20} = 4$.

Необходимо найти финальные вероятности и сделать анализ полученных решений.

Решение. Размеченный граф состояний изображен на рис. 8.5.

По графу состояний в подразд. 8.3 была получена система уравнений Колмогорова (8.1):

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t) + \lambda_{20}P_2(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12}P_1(t) - (\lambda_{20} + \lambda_{21})P_2(t), \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1. \end{cases}$$

Вместо интенсивностей потоков λ_{ij} запишем их конкретные значения и получим искомую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -2P_0(t) + 4P_1(t) + 4P_2(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = 2P_0(t) - 7P_1(t) + 2P_2(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = 3P_1(t) - 6P_2(t), \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1. \end{cases} \tag{8.2}$$

Чтобы найти финальные вероятности состояний, в уравнениях Колмогорова (8.2) отбросим первое уравнение, а по остальным составим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2P_0 & -7P_1 & +2P_2 = 0, \\ & 3P_1 & -6P_2 = 0, \\ P_0 & +P_1 & +P_2 \;=\; 1. \end{cases}$$

Решаем эту систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 54; \Delta_{P_0} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 36;$$

$$\Delta_{P_1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12; \Delta_{P_2} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

$$P_0 = \frac{\Delta_{P_0}}{\Delta} = \frac{36}{54} \approx 0,67; P_1 = \frac{\Delta_{P_1}}{\Delta} = \frac{12}{54} \approx 0,22; P_2 = \frac{\Delta_{P_2}}{\Delta} = \frac{6}{54} \approx 0,11.$$

Вывод. При достаточно большом времени работы раскряжевочная установка с вероятностью $P_0 = 0,67$ будет находиться в состоянии S_0, с вероятностью $P_1 = 0,22$ – в состоянии S_1 и с вероятностью $P_2 = 0,11$ – в состоянии S_2. Другими словами, раскряжевочная установка будет осуществлять раскряжевку хлыстов только 22% всего времени, 67% всего времени будет простаивать из-за отсутствия хлыстов и 11% – будет находиться на ремонте. Естественно, чтобы увеличить эффективность работы установки, нужно провести организационные мероприятия по увеличению загрузки установки.

Теория массового обслуживания широко используется в лесопромышленном комплексе. Рассматриваются системы массового обслуживания с отказами, очередями, одномашинные и многомашинные системы без запасов и с запасами, системы с учетом надежности оборудования и некоторые др.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1. Техническое устройство может находиться в одном из двух состояний S_1, S_2.

Необходимо:

1) построить размеченный граф состояний;

2) записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова;

3) найти финальные вероятности;

4) проанализировать полученное решение, если интенсивности потоков, переводящих устройство из одного состояния в другое, будут

а) $\lambda_{12} = 1, \lambda_{21} = 2;$

б) $\lambda_{12} = 2, \lambda_{21} = 3;$

в) $\lambda_{12} = 4, \lambda_{21} = 2;$

г) $\lambda_{12} = 3, \lambda_{21} = 1;$

д) $\lambda_{12} = 1, \lambda_{21} = 4.$

2. Техническое устройство может находиться в одном из трех состояний S_0, S_1, S_2.

Необходимо:

1) построить размеченный граф состояний;

2) записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова;

3) найти финальные вероятности;

4) проанализировать полученное решение, если интенсивности потоков, переводящих устройство из одного состояния в другое, будут

а) $\lambda_{01} = 2, \lambda_{02} = 0, \lambda_{10} = 4, \lambda_{12} = 1, \lambda_{20} = 2, \lambda_{21} = 2;$

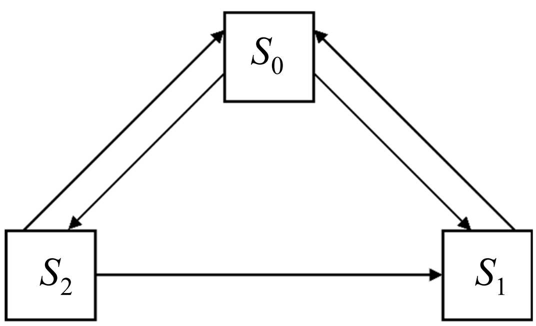
б) $\lambda_{01} = 2, \lambda_{02} = 1, \lambda_{10} = 4, \lambda_{12} = 3, \lambda_{20} = 1, \lambda_{21} = 1;$

в) $\lambda_{01} = 1, \lambda_{02} = 2, \lambda_{10} = 0, \lambda_{12} = 1, \lambda_{20} = 3, \lambda_{21} = 2;$

г) $\lambda_{01} = 0, \lambda_{02} = 3, \lambda_{10} = 2, \lambda_{12} = 1, \lambda_{20} = 2, \lambda_{21} = 1;$

д) $\lambda_{01} = 3, \lambda_{02} = 1, \lambda_{10} = 4, \lambda_{12} = 2, \lambda_{20} = 4, \lambda_{21} = 0.$

3. По заданному графу состояний



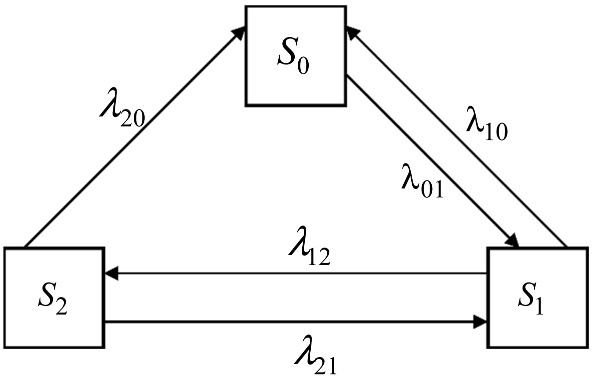
с интенсивностями $\lambda_{01}=1$, $\lambda_{02}=3$, $\lambda_{10}=2$, $\lambda_{20}=2$, $\lambda_{21}=4$ необходимо:

а) записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова;

б) найти финальные вероятности состояний;

в) сделать анализ полученного решения.

4. По заданному графу состояний



с интенсивностями $\lambda_{01}=3, \lambda_{10}=2$, $\lambda_{12}=1$, $\lambda_{21}=4$, $\lambda_{20}=1$ необходимо:

а) записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова;

б) найти финальные вероятности состояний;

в) сделать анализ полученного решения

Ответы

1. а) $P_1 \approx 0{,}67; P_2 \approx 0{,}33$; б) $P_1 = 0{,}6$; $P_2 = 0{,}4$; в) $P_1 = 0{,}33(3)$; $P_2 = 0{,}66(6)$; г) $P_1 = 0{,}25; P_2 = 0{,}75$; д) $P_1 = 0{,}8$; $P_2 = 0{,}2$. **2.** а) $P_0 = 0{,}64$; $P_1 = 0{,}29$; $P_2 = 0{,}07$; б) $P_0 = 0{,}38$; $P_1 = 0{,}17$; $P_2 = 0{,}45$; в) $P_0 = 0{,}2$; $P_1 = 0{,}6$; $P_2 = 0{,}2$; г) $P_0 = 0{,}4$; $P_1 = 0{,}15$; $P_2 = 0{,}45$; д) $P_0 = 0{,}5$; $P_1 = 0{,}25$; $P_2 = 0{,}25$. **3.** $P_0 \approx 0{,}33$; $P_1 \approx 0{,}5$; $P_2 \approx 0{,}17$. **4.** $P_0 \approx 0{,}38$; $P_1 \approx 0{,}52$; $P_2 \approx 0{,}1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,34	0,1331	0,68	0,2517	1,02	0,3461	1,36	0,4131
0,01	0,0040	0,35	0,1368	0,69	0,2549	1,03	0,3485	1,37	0,4147
0,02	0,0080	0,36	0,1406	0,70	0,2580	1,04	0,3508	1,38	0,4162
0,03	0,0120	0,37	0,1443	0,71	0,2611	1,05	0,3531	1,39	0,4177
0,04	0,0160	0,38	0,1480	0,72	0,2642	1,06	0,3554	1,40	0,4192
0,05	0,0199	0,39	0,1517	0,73	0,2673	1,07	0,3577	1,41	0,4207
0,06	0,0239	0,40	0,1554	0,74	0,2704	1,08	0,3599	1,42	0,4222
0,07	0,0279	0,41	0,1591	0,75	0,2734	1,09	0,3621	1,43	0,4236
0,08	0,0319	0,42	0,1628	0,76	0,2764	1,10	0,3643	1,44	0,4251
0,09	0,0359	0,43	0,1664	0,77	0,2794	1,11	0,3665	1,45	0,4265
0,10	0,0398	0,44	0,1700	0,78	0,2823	1,12	0,3686	1,46	0,4279
0,11	0,0438	0,45	0,1736	0,79	0,2852	1,13	0,3708	1,47	0,4292
0,12	0,0478	0,46	0,1772	0,80	0,2881	1,14	0,3729	1,48	0,4306
0,13	0,0517	0,47	0,1808	0,81	0,2910	1,15	0,3749	1,49	0,4319
0,14	0,0557	0,48	0,1844	0,82	0,2939	1,16	0,3770	1,50	0,4332
0,15	0,0596	0,49	0,1879	0,83	0,2967	1,17	0,3790	1,51	0,4345
0,16	0,0636	0,50	0,1915	0,84	0,2995	1,18	0,3810	1,52	0,4357
0,17	0,0675	0,51	0,1950	0,85	0,3023	1,19	0,3830	1,53	0,4370
0,18	0,0714	0,52	0,1985	0,86	0,3051	1,20	0,3849	1,54	0,4382
0,19	0,0753	0,53	0,2019	0,87	0,3078	1,21	0,3869	1,55	0,4394
0,20	0,0793	0,54	0,2054	0,88	0,3106	1,22	0,3888	1,56	0,4406
0,21	0,0832	0,55	0,2088	0,89	0,3133	1,23	0,3907	1,57	0,4418
0,22	0,0871	0,56	0,2123	0,90	0,3159	1,24	0,3925	1,58	0,4429
0,23	0,0910	0,57	0,2157	0,91	0,3186	1,25	0,3944	1,59	0,4441
0,24	0,0948	0,58	0,2190	0,92	0,3212	1,26	0,3962	1,60	0,4452
0,25	0,0987	0,59	0,2224	0,93	0,3238	1,27	0,3980	1,61	0,4463
0,26	0,1026	0,60	0,2257	0,94	0,3264	1,28	0,3997	1,62	0,4474
0,27	0,1064	0,61	0,2291	0,95	0,3289	1,29	0,4015	1,63	0,4484
0,28	0,1103	0,62	0,2324	0,96	0,3315	1,30	0,4032	1,64	0,4495
0,29	0,1141	0,63	0,2357	0,97	0,3340	1,31	0,4049	1,65	0,4505
0,30	0,1179	0,64	0,2389	0,98	0,3365	1,32	0,4066	1,66	0,4515
0,31	0,1217	0,65	0,2422	0,99	0,3389	1,33	0,4082	1,67	0,4525
0,32	0,1255	0,66	0,2454	1,00	0,3413	1,34	0,4099	1,68	0,4535
0,33	0,1293	0,67	0,2486	1,01	0,3438	1,35	0,4115	1,69	0,4545
1,70	0,4554	1,88	0,4699	2,12	0,4830	2,48	0,4934	2,84	0,4977
1,71	0,4564	1,89	0,4706	2,14	0,4838	2,50	0,4938	2,86	0,4979

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,72	0,4573	1,90	0,4713	2,16	0,4846	2,52	0,4941	2,88	0,4980
1,73	0,4582	1,91	0,4719	2,18	0,4854	2,54	0,4945	2,90	0,4981
1,74	0,4591	1,92	0,4726	2,20	0,4861	2,56	0,4948	2,92	0,4982
1,75	0,4599	1,93	0,4732	2,22	0,4868	2,58	0,4951	2,94	0,4984
1,76	0,4608	1,94	0,4738	2,24	0,4875	2,60	0,4953	2,96	0,4985
1,77	0,4616	1,95	0,4744	2,26	0,4881	2,62	0,4956	2,98	0,4986
1,78	0,4625	1,96	0,4750	2,28	0,4887	2,64	0,4959	3,00	0,49865
1,79	0,4633	1,97	0,4756	2,30	0,4893	2,66	0,4961	3,20	0,49931
1,80	0,4641	1,98	0,4761	2,32	0,4898	2,68	0,4963	3,40	0,49966
1,81	0,4649	1,99	0,4767	2,34	0,4904	2,70	0,4965	3,60	0,499841
1,82	0,4656	2,00	0,4772	2,36	0,4909	2,72	0,4967	3,80	0,499928
1,83	0,4664	2,02	0,4783	2,38	0,4913	2,74	0,4969	4,00	0,499968
1,84	0,4671	2,04	0,4793	2,40	0,4918	2,76	0,4971	4,50	0,499997
1,85	0,4678	2,06	0,4803	2,42	0,4922	2,78	0,4973	5,00	0,499997
1,86	0,4686	2,08	0,4812	2,44	0,4927	2,80	0,4974	$x > 5$	0,5
1,87	0,4693	2,10	0,4821	2,46	0,4931	2,82	0,4976		

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Стьюдента (*t*-распределение)

Число степеней свободы ν	Уровень значимости (двухсторонняя критическая область) α		Число степеней свободы ν	Уровень значимости (двухсторонняя критическая область) α	
	0,10	0,05		0,10	0,05
1	6,314	12,706	18	1,734	2,101
2	2,920	4,303	19	1,729	2,093
3	2,353	3,182	20	1,725	2,086
4	2,132	2,776	21	1,721	2,080
5	2,015	2,571	22	1,717	2,074
6	1,943	2,447	23	1,714	2,069
7	1,89	2,365	24	1,711	2,064
8	1,860	2,306	25	1,708	2,060
9	1,833	2,262	26	1,706	2,056
10	1,812	2,228	27	1,703	2,052
11	1,796	2,201	28	1,701	2,048
12	1,782	2,179	29	1,699	2,045
13	1,771	2,160	30	1,697	2,042
14	1,761	2,145	40	1,684	2,021
15	1,753	2,131	60	1,671	2,000
16	1,746	2,120	120	1,658	1,980
17	1,740	2,110	∞	1,645	1,960

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

2. Распределение χ^2

Число степеней свободыν	Уровень значимости α			Число степеней свободы ν	Уровень значимости α		
	0,01	0,025	0,05		0,01	0,025	0,05
1	6,6	5,0	3,8	16	32,0	28,8	26,3
2	9,2	7,4	6,0	17	33,4	30,2	27,2
3	11,3	9,4	7,8	18	3,8	31,5	28,9
4	15,1	11,1	9,5	19	36,2	32,9	30,1
5	15,1	12,8	11,1	20	37,6	34,2	31,4
6	16,8	14,4	12,6	21	38,9	35,5	32,7
7	18,5	16,0	14,1	22	40,3	36,8	33,9
8	20,1	17,5	15,5	23	41,6	38,1	35,2
9	217	19,0	16,9	24	43,0	39,4	36,4
10	23,2	20,5	18,3	25	44,3	40,6	37,7
15	30,6	27,5	25,0	30	50,9	47,0	43,8

ЛИТЕРАТУРА

1. Астровский, А. И. Высшая математика: учеб.: в 2 ч. / А. И. Астровский, М. П. Дымков. – Минск: БГЭУ, 2024. – Ч. 2. – 414 с.

2. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа: учеб. пособие / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – 16-е изд. – СПб.: Лань, 2021. – 736 с.

3. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г. Н. Берман. – 22-е изд. – М.: Транспортная компания, 2015. – 431 с.

4. Кастрица, О. А. Математический анализ. Краткий курс: учеб. пособие / О. А. Кастрица, С. А. Мазаник. – Минск: БГУ, 2017. – 299 с.

5. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – 2-е изд, перераб. и доп. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.

6. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Т. Письменный. – 16-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2021. – 608 с.

7. Высшая математика: учеб. пособие: в 2 ч. / В. М. Марченко, И. К. Асмыкович, И. М. Борковская [и др.]. – Минск: БГТУ, 2010. – Ч. 1. – 204 с; 2014. – Ч. 2. – 336 с.

8. Высшая математика: учеб. пособие: в 2 ч. / В. В. Игнатенко, А. М. Волк, О. Н. Пыжкова, Е. В. Терешко; под общ. ред. В. В. Игнатенко. – Минск: БГТУ, 2022. – Ч. 1, кн. 1. – 214 с.; 2023. – Ч. 1, кн. 2. – 180 с.

9. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа: учеб: в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 14-е изд. – СПб.: Лань, 2021. – Т. 1. – 444 с.

10. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс: учеб. для академического бакалавриата: в 2 т. / В. С. Шипачев; под ред. А. Н. Тихонова. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2018. – Т. 1. – 248 с.

11. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, Т. Я. Кожевникова, А. Г. Попов. – 7-е изд., испр. – М.: Мир и образование, 2024. – 816 с.

12. Блинова, Е. И. Теория вероятностей: учеб. пособие / Е. И. Блинова, В. М. Марченко, Н. П. Можей. – Минск: БГТУ, 2005. – 120 с.

13. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2004. – 480 с.

14. Агапов, Г. И. Задачник по теории вероятностей: учеб. пособие / Г. И. Агапов. – М.: Высш. шк., 1986. – 80 с.

15. Основы научных исследований: метод. указания / сост.: И. В. Турлай, А. С. Федоренчик, В. В. Игнатенко. – Минск: БТИ им. С. М. Кирова, 1988. – 74 с.

16. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 2 ч. / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ, 1977. – Ч. 1: Общие задачи. – 176 с.

17. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 2 ч. / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – Ч. 2: Транспортные задачи. – 240 с.

18. Булатов, А. Ф. Оптимизация в планировании и управлении предприятиями лесопромышленного комплекса: учеб. пособие / А. Ф. Булатов, А. В. Воронин, В. А. Кузнецов. – Петрозаводск: ПетрГУ, 2001. – 227 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Игнатенко Василий Васильевич
Капура Михаил Сергеевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В 2-х частях
Часть 2

В 2-х книгах
Книга 2

Учебное пособие

Редактор *Е. И. Гоман*
Компьютерная верстка *Е. А. Матейко*
Дизайн обложки *Д. А. Кускильдина*
Корректор *Е. И. Гоман*

Подписано в печать 26.03.2026. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 13,0. Уч.-изд. л. 11,0.
Тираж 450 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.