УДК 531

С.А. Голякевич, Д.В. Гапанюк, В.С. Вихренко. (БГТУ, г. Минск)

ВЛИЯНИЕ СООТНОШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ УГЛОВОЙ И ЛИНЕЙНОЙ СКОРОСТЕЙ НА ДВИЖЕНИЕ КОЛЬЦА ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При исследовании движения диска по шероховатой плоскости было замечено, что его вращательное и поступательное движение прекращается одновременно [1, 2]. Возникает вопрос, сохранится ли эта особенность и при движении кольца.

Рассмотрим тонкое однородное кольцо радиуса R. На каждый элементарный участок кольца действует элементарная сила трения $dF=(fG/2\pi)d\varphi$, где f – коэффициент трения кольца о горизонтальную поверхность, G – вес кольца, φ – угол, определяющий поворот кольца и отсчитываемый против хода часовой стрелки от прямой, перпендикулярной начальной скорости $\mathbf{u}_0$ центра масс кольца C (ось y). Направление элементарной силы трения противоположно скорости соответствующей точки кольца или, другими словами, перпендикулярно мгновенному радиусу, соединяющему эту точку и мгновенный центр скоростей (МЦС).

Учитывая, что проекции элементарных сил трения на направление, перпендикулярное начальной скорости центра масс кольца (ось x) для элементов кольца с одинаковыми по величине, но противоположными по знаку углами φ также одинаковы и противоположны по знаку, суммарная сила в проекции на ось y равна нулю и центр масс должен двигаться прямолинейно вдоль его начальной скорости, т. е. = 0.

В проекции на ось OX для элементарной силы трения получим

$$dF_x=-dF\cos\psi=-(fG/2\pi)\cos\psi d\varphi, \tag{1}$$

где ψ – угол между направлением действия элементарной силы трения и осью OX, определяемый по формуле

$$\cos\psi=\frac{b-R\cos\varphi}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\varphi}}, \tag{2}$$

$b=V_C/\omega$ – расстояние от МЦС до центра кольца.

Проинтегрируем выражение для F_x по углу φ, учитывая, что распределение сил трения симметрично относительно диаметра кольца, параллельного оси y. Поэтому интегрирование выполняем по половине кольца и результат удваиваем:

$$F_x = -\frac{fG}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{b - R\cos\varphi}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\varphi}}d\varphi = -\frac{fG}{\pi\sqrt{1+\beta^2}}\int_0^{\pi}\frac{\beta - \cos\varphi}{\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}}, \quad (3)$$

где $\beta = b/R$, $\gamma = 2\beta/(1+\beta^2)$.

Элементарный момент сил трения относительно МЦС P запишется в следующем виде

$$dM_P = (fGR/2\pi)\sqrt{1+\beta^2}\,\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}\,d\varphi. \quad (4)$$

Проинтегрировав записанное выше выражение по углу φ, получим:

$$M_P = f\frac{mgR}{\pi}\sqrt{1+\beta^2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}\,d\varphi. \quad (5)$$

Интеграл, который входит в состав этого выражения

$$I_1(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}\,d\varphi, \quad (6)$$

где $0 \le \gamma \le 1$, вычислить аналитически не представляется возможным. Поэтому воспользуемся его разложением в ряд по $\cos\varphi$ и последующим интегрированием, сохраняя первые 5 членов:

$$I_1(\gamma) \cong 1 - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{8}\gamma^2 - \frac{1}{16}\gamma^3 - \frac{5}{128}\gamma^4 - \frac{7}{256}\gamma^5. \quad (7)$$

Таким образом, выражение для момента сил трения запишем в виде:

$$M_P = fmgR\sqrt{1+\beta^2}\,I_1(\gamma). \quad (8)$$

Для вычисления силы трения согласно соотношению (2) введем соответствующие интегралы

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}}d\varphi, \quad I_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}}d\varphi, \quad (9)$$

и вновь прибегнем к разложениям в ряд по $\cos\varphi$

$$I_2(\gamma) \cong 1 + \frac{3}{16}\gamma^2 + \frac{105}{1024}\gamma^4 - \frac{1155}{16384}\gamma^6, \qquad I_3(\gamma) \cong \frac{1}{4}\gamma + \frac{15}{128}\gamma^3 - \frac{315}{4096}\gamma^5.$$

Подставив (9) в выражение (3), получим

$$F_x = -fmg(\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma))/\sqrt{1+\beta^2}. \quad (10)$$

Так как линия действия равнодействующей элементарных сил трения не будет проходить через центр масс, то момент сил трения относительно центра масс можно записать в виде: $M_C = M_P + F_x \cdot CP$, где $CP = b$. После преобразований, получим

$$M_C = -\sqrt{1+\beta^2}\left[\beta I_1(\gamma) - \frac{\gamma}{2}(\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma))\right]. \qquad (11)$$

Чтобы исключить из конечных выражений коэффициент трения f и ускорение свободного падения g, введем безразмерные скорость $U = V_C / V_{C0}$, угловую скорость $\Omega = \omega R / V_{C0}$ и время $\tau = (fg / V_{C0})t$.

Используя значения M_C и F_x, получим систему дифференциальных уравнений движения кольца по шероховатой поверхности:

$$\begin{cases} d\Omega = -\sqrt{1+\beta^2}\left[\beta I_1(\gamma) - \frac{\gamma}{2}(\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma))\right]d\tau \\ dU = -\left\{[\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma)] / \sqrt{1+\beta^2}\right\}d\tau \end{cases} \qquad (12)$$

Решение полученной системы дифференциальных уравнений проводилось в среде Mathcad. Для времени движения при значениях начальных угловых и линейных скоростей после перехода к размерным величинам получены следующие результаты:

Начальная угловая скорость, рад/с	Начальная линейная скорость, м/с	Коэффициент трения скольжения	Время до остановки, с
10	20	0,4	5,2
30	15	0,3	15,4
50	10	0,25	20,5
70	5	0,2	17,8
90	1	0,1	9,2

Отметим, что как поступательное, так и вращательное движение кольца прекращалось одновременно, как и в случае движения диска [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. E. // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 90, no. 24. – P. 248302.

2. Weidman P., Malhotra C. // Phys. Rev. Lett. – 2005. – V. 95, no. 26. – P.264303.