Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В РАСЧЕТАХ НА ЭВМ

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика» для студентов-заочников инженерно-технических и экономических специальностей

Минск
2003

УДК 51

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета.

Составители: А.М. Волк, В.В. Игнатенко, А.В. Яценко
Научный редактор профессор В.М. Марченко
Рецензенты: доцент кафедры методов оптимального управления БГУ В.В. Крахотко;
доцент кафедры теоретической механики БГТУ Г.С. Бокун

Приведены программа, задания, основные теоретические сведения специальных разделов высшей математики, типовые задачи с решениями и рекомендациями по выполнению контр:льных работ.

По тематическому плану внутривузовских изданий учебно-методической литературы на 2003 год. Поз. 59.

Для студентов-заочников инженерно-технических и экономических специальностей.

ВВЕДЕНИЕ

Методы обработки результатов измерений, статистических методов исследования, решение оптимизационных задач требуют изучения специальных разделов прикладной математики.

В данном пособии изложены программа, теоретические сведения, образцы решения задач и контрольные задания по темам: «Эмпирические функции», «Элементы математической статистики», «Линейное программирование», «Теория массового обслуживания», «Ряд Фурье» и «Решение волнового уравнения методом Даламбера» для студентов-заочников второго и третьего курсов инженерно-технических и экономических специальностей.

Изложенный материал позволит студентам заочной формы обучения освоить теоретические сведения по перечисленным выше разделам, самостоятельно выполнить контрольные работы и успешно сдать экзамен. Основные определения и теоремы изложены достаточно подробно, приведены методы решения задач, но ограниченный объём пособия не позволил привести доказательства результатов.

В приложениях приведены таблицы наиболее часто используемых в математической статистике функций, что позволит студентам решать соответствующие задачи, не обращаясь к дополнительной литературе. Для более глубокого изучения соответствующих разделов в пособии приведен список литературы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

1.1. Эмпирические функции. Метод наименьших квадратов

В физике, химии и других прикладных науках при обработке результатов наблюдений часто встречаются со следующей задачей: экспериментально получен ряд парных значений x и y, требуется по полученным данным найти аналитическое выражение зависимости между x и y. Формулы, полученные в результате решения такого рода задач, называются эмпирическими.

Задача получения эмпирической формулы состоит из двух этапов: 1) определение вида зависимости (выбор класса функций, которому должна принадлежать искомая зависимость); 2) определение параметров эмпирической формулы.

Определение вида зависимости может быть произведено на основе теоретических представлений о характере изучаемой зависимости или же путем сравнения кривой, построенной по данным наблюдения, с образцами известных кривых. Например, расположение экспериментальных точек на графике может навести на мысль о линейной, или квадратичной, или экспоненциальной, или какой-либо другой зависимости. Однако общего метода для нахождения наилучшего типа эмпирической формулы, соответствующей опытным данным, указать нельзя.

После того как определен класс, которому должна принадлежать функция, встает вопрос о выборе конкретной функции этого класса. Как правило, все функции класса можно описать в виде функции, зависящей от x и нескольких числовых параметров

$$y = f(x, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m). \qquad (1.1)$$

Одним из основных методов определения параметров эмпирической зависимости является метод наименьших квадратов. Данный метод не решает вопроса о выборе вида аналитической зависимости, а только дает возможность определить значения параметров для выбранной зависимости.

Сущность метода наименьших квадратов заключается в том, что параметры зависимости (1.1) находятся по экспериментальной выборке (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ объема n из условия минимума суммы квадратов отклонений

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m) - y_i \right]^2 . \qquad (1.2)$$

Выражение S можно рассматривать как функцию параметров $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$. Если S имеет непрерывные производные по всем параметрам, то из необходимого условия экстремума функции многих переменных следует, что в точке минимума эти производные должны равняться нулю, т. е. искомые значения параметров должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \qquad (1.3)$$

Известно, что если зависимость (1.1) является многочленом степени m, то функция $S = S(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ имеет одну точку экстремума в которой достигается минимум. В этом случае искомые значения $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ представляют собой решение системы (1.3).

Пусть

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$

тогда

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x^m - y_i \right)^2 .$$

Система (1.3) имеет вид

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i \right) = 0, \\ 2\sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i \right) x_i = 0, \\ \vdots \\ 2\sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i \right) x_i^m = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем систему с $m+1$ уравнениями для определения неизвестных параметров $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$.

$$
\begin{cases}
a_0 n + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\
a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\
a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\
\vdots \\
a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i.
\end{cases} \qquad (1.4)
$$

Данная система называется нормальной, и она решается любым известным методом (Гаусса, Крамера, матричным).

Отметим частный случай, наиболее часто встречающийся на практике – случай линейной зависимости y от x. Если зависимость линейная $y = ax + b$, то система (1.4) принимает вид

$$
\begin{cases}
bn + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\
b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.
\end{cases} \qquad (1.5)
$$

Пример 1. В результате опыта получены следующие значения x и y:

x_i	5	11	18	20	25
y_i	10	22	33	39	51

Требуется получить эмпирическую функциональную зависимость.

Решение.

На координатной плоскости xOy нанесем точки $M_i(x_i, y_i)$ $i = \overline{1,5}$ (рис. 1.). По характеру расположения точек есть основание полагать, что зависимость между y и x линейная $y = ax + b$. Параметры a и b найдем из системы (1.5).

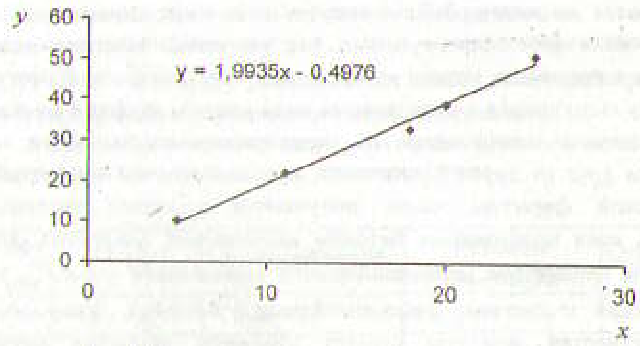

Рис. 1. Точечная диаграмма и график зависимости

Для вычисления коэффициентов системы составим таблицу

Таблица 1

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	5	10	25	50
2	11	22	121	242
3	18	33	324	594
4	20	39	400	780
5	25	51	625	1275
Σ	79	155	1495	2941

Получаем систему $\begin{cases} 5b + 79a = 155, \\ 79b + 1495a = 2941. \end{cases}$

Решение системы дает значения $a = 1{,}9935$; $b = -0{,}4976$. Значит, $y = 1{,}9935x - 0{,}4976$. Точечная диаграмма и график зависимости, приведенные на рис. 1, показывают их соответствие.

1.2. Эмпирические функции. Метод выравнивания

Наиболее "удобной" с точки зрения получения эмпирических формул является линейная зависимость: во-первых, ее вид легко установить из геометрического расположения точек (x_i, y_i) $i = \overline{1,n}$, во-вторых, существует много достаточно простых методов для нахождения ее параметров. Гораздо сложнее обстоит дело в случае нелинейной зависимости. Экспериментальные данные обычно располагаются на некотором промежутке изменения переменной, и довольно часто этот промежуток не так уж велик. Поэтому, если искать вид зависимости исходя из геометрических построений, могут возникнуть затруднения в определении вида кривой: графики многих функциональных зависимостей на некоторых участках почти не отличаются друг от друга. Кроме того, при нахождении параметров эмпирической формулы часто получаются сложные системы. Например, если пользоваться методом наименьших квадратов, для нахождения параметров экспоненциальной зависимости $y = a\,e^{bx}$, то мы приходим к системе трансцендентных уравнений. Указанных выше трудностей зачастую удается избежать, применяя метод выравнивания, суть которого состоит в следующем.

Пусть для переменных x и y соответствующие значения (x_i, y_i) $i = \overline{1,n}$ таковы, что точки $M_i(x_i, y_i)$ $i = \overline{1,n}$ не располагаются вдоль прямой линии. И пусть из геометрического расположения этих точек определен вид нелинейной зависимости

$$y = f(x, a, b). \tag{2.1}$$

Найдем, если это возможно, взаимно-однозначное соответствие

$$X = \varphi(x, y),\ Y = \psi(x, y), \tag{2.2}$$

при котором нелинейная зависимость переходит в линейную

$$Y = AX + B. \tag{2.3}$$

По формулам

$$X = \varphi(x_i, y_i),\ Y = \psi(x_i, y_i),\ i = \overline{1,n}, \tag{2.4}$$

найдем соответствующие значения новых переменных.

Получим

X	X_1	X_2	...	X_n
Y	Y_1	Y_2	...	Y_n

(2.5)

На плоскости XOY точки (X_i, Y_i) $i = \overline{1,n}$ должны располагаться вдоль некоторой прямой. Методом наименьших квадратов по данным (2.5) определяем параметры A и B зависимости (2.3). Затем ищут параметры a и b, записывают искомую зависимость (2.1).

Методом выравнивания пользуются не только для определения неизвестных параметров, но и проверки правильности выбора вида функциональной зависимости. Действительно, если вид функциональной зависимости y от x определен правильно, то точки (X_i, Y_i) $i = \overline{1,n}$ будут располагаться вблизи некоторой прямой. Если это не так, то вид зависимости выбран неправильно.

Способы выравнивания некоторых функций, наиболее часто встречающихся на практике, приведены ниже.

Таблица 2

№ п/п	$y = f(x)$	Преобразование	Искомые параметры	Ограничения
1	$y = bx^a$	$Y = \ln y$; $X = \ln x$	$a = A$; $b = e^B$	$x > 0$; $y > 0$
2	$y = be^{ax}$	$Y = \ln y$; $X = x$	$a = A$; $b = e^B$	$y > 0$
3	$y = \dfrac{1}{ax+b}$	$Y = \dfrac{1}{y}$; $X = x$	$a = A$; $b = B$	$y \neq 0$
4	$y = \dfrac{x}{ax+b}$	$Y = \dfrac{x}{y}$; $X = x$	$a = A$; $b = B$	$y \neq 0$
5	$y = a\ln x + b$	$Y = y$; $X = \ln x$	$a = A$; $b = B$	$x > 0$

На рис. 2 – 6 приведены графики некоторых функциональных зависимостей.

Когда тип зависимости выбран правильно, то после преобразования переменных точки (X_i, Y_i), $i = \overline{1,n}$ должны быть близкими к прямой линии.

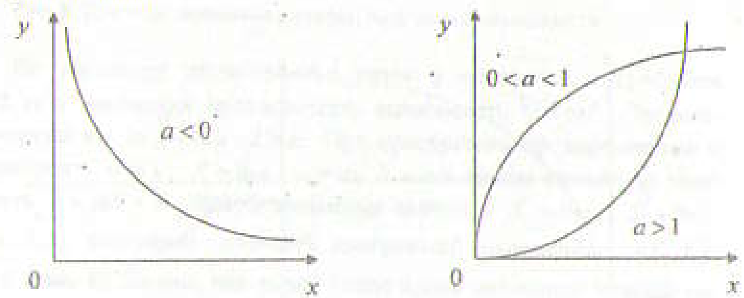

Рис. 2. Зависимость $y = bx^a$, $b > 0$

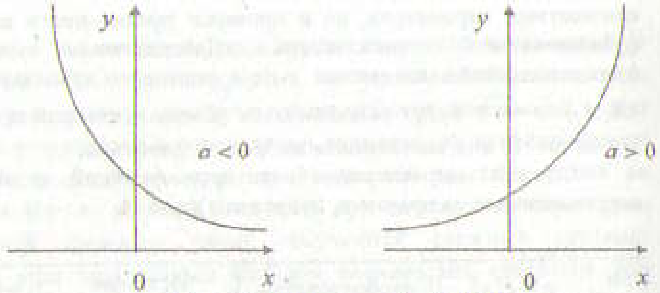

Рис. 3. Зависимость $y = be^{ax}$, $b > 0$

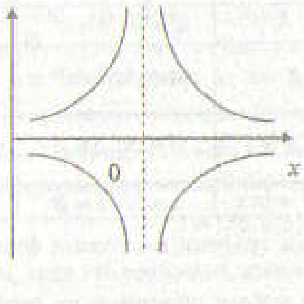

Рис. 4. Зависимость $y = \frac{1}{ax+b}$

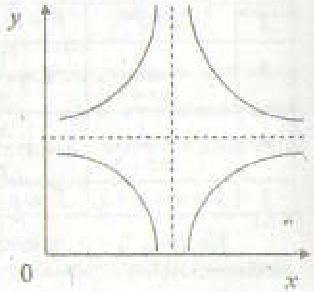

Рис. 5. Зависимость $y = \frac{x}{ax+b}$

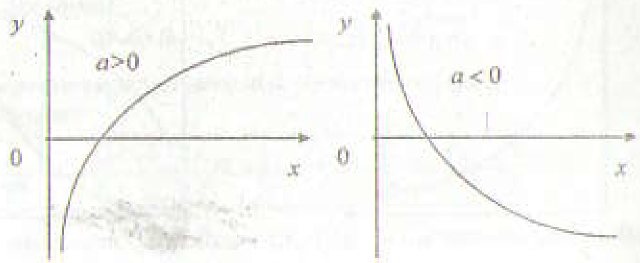

Рис. 6. Зависимость $y = a\ln x + b$

Параметры A и B линейной зависимости обычно ищут методом наименьших квадратов. После чего находят параметры a и b и записывают первоначальную зависимость.

Пример. Определить функциональную зависимость y от x по результатам экспериментальных данных.

x	1	2	3	4	5	6
y	31,6	27,7	25,7	24,2	23,3	22,5

Решение. На координатную плоскость xOy нанесем точки $M_i(x_i, y_i)$ $i = \overline{1,6}$.

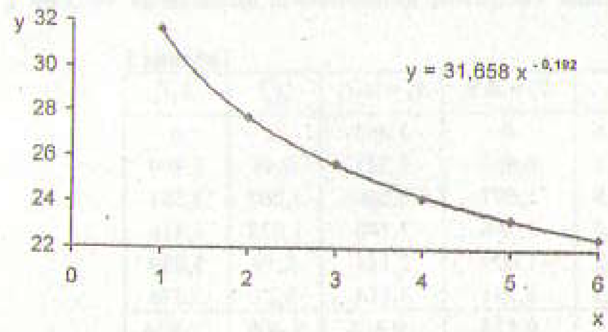

Рис. 7. Точечная диаграмма и график полученной зависимости

По характеру расположения точек и сравнения с графиком рис. 2 есть основания предположить зависимость $y = bx^a$. Прологарифмируем ее: $\ln y = \ln b + a\ln x$. При преобразовании переменных и параметров $Y = \ln y$; $X = \ln x$; $A = a$; $B = \ln b$ имеем линейную зависимость $Y = AX + B$. Преобразованные значения $X_i = \ln x_i$, $Y_i = \ln y_i$ (табл. 1.3) изобразим точечной диаграммой переменных (X_i, Y_i), $i = \overline{1,6}$ (рис. 8). Видим, что точки лежат вдоль некоторой прямой линии.

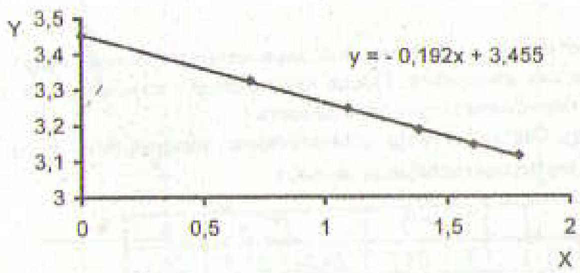

Рис. 8. Зависимость преобразованных переменных

Находим коэффициенты линейной зависимости $Y = AX + B$ методом наименьших квадратов, выполненные вычисления заносим в табл. 3.

Таблица 3

x_i	y_i	$X_i = \ln x_i$	$Y_i = \ln y_i$	X_i^2	X_iY_i
1	31,6	0	3,453	0	0
2	27,8	0,693	3,325	0,48	2,304
3	25,9	1,097	3,246	1,207	3,561
4	24,2	1,386	3,186	1,922	4,416
5	23,2	1,609	3,144	2,59	5,059
6	22,5	1,791	3,114	3,21	5,576
$\sum$		6,576	19,468	9,409	20,916

Составим нормальную систему уравнений

$$\begin{cases} 6B + 6{,}576A = 19{,}468, \\ 6{,}576B + 9{,}409A = 20{,}916. \end{cases}$$

Делим уравнения системы на первый коэффициент

$$\begin{cases} B + 1{,}096\,A = 3{,}245, \\ B + 1{,}431A = 3{,}181. \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения первое и получим

$0{,}335\,A = -0{,}064$

Отсюда находим $A = -0{,}192$.

Затем вычисляем $B = 3{,}455$.

График линейной функции изображаем на рис. 8.

Сравнение точечной диаграммы с графиком показывает, что зависимость выбрана верно, точки лежат на прямой линии.

Параметры искомой зависимости $b = e^B = e^{3,455} = 31{,}658$; $a = A = -0{,}192$.

Искомая зависимость имеет вид $y = 31{,}658\,x^{-0,192}$. График полученной функции изобразим на рис. 7. Исходные точки лежат на графике, значит, полученная экспериментальная зависимость верна.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

2.1. Статистический ряд и его описание

Математическая статистика занимается статистическим описанием результатов опытов или наблюдений и проверкой подходящих математических моделей, содержащих случайные величины.

Генеральной совокупностью называется множество всех возможных значений случайной величины ξ.

Выборкой объёма n называется множество $x_1, x_2, \cdots, x_n$ наблюдаемых значений изучаемой случайной величины ξ, которые соответствуют n независимым испытаниям (опытам).

Размах выборки W – разность между максимальным и минимальным значениями элементов выборки: $W = x_{max} - x_{min}$.

Статистический ряд – совокупность пар (x_i, n_i), $i = \overline{1, k}$, где x_i – разные элементы выборки, n_i – частота появления выборочного значения x_i. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Величины $\omega_i = \frac{n_i}{n}$, $i = \overline{1, k}$ называются относительными частотами и для них $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$.

Обычно статистический ряд записывают в виде табл. 4, где x_i записываются в порядке возрастания.

Таблица 4

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
ω_i	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

При изучении непрерывной случайной величины или при большом объёме выборки ее элементы объединяются в группы и получают интервальный статистический ряд (табл. 5).

Если все интервалы имеют одинаковую длину h, то $h = \frac{W}{k}$. Количество интервалов выбирают от 5 до 20. Для определения количества интервалов применяется формула

$$k = 1 + 3{,}2 \lg n. \tag{2.1}$$

Таблица 5

Интервал	$[x_{min}, x_2)$	$[x_2, x_3)$	...	$[x_k, x_{max}]$
Середина интервала	$\overset{*}{x_1}$	$\overset{*}{x_2}$	...	$\overset{*}{x_k}$
Частота	n_1	n_2	...	n_k
Относительная частота	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Полигоном частот статистического ряда называется ломаная линия с вершинами в точках (x_i, n_i), $i = \overline{1, k}$.

Полигоном относительных частот статистического ряда называется ломаная линия с вершинами в точках $\left(x_i, \frac{n_i}{n}\right)$, $i = \overline{1, k}$.

Гистограммой относительных частот статистического интервального ряда называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах группирования с высотой прямоугольников $\frac{n_i}{nh}$. Площадь каждого прямоугольника равна $\frac{n_i}{n}$, а сумма площадей всех прямоугольников равна 1.

Эмпирической функцией распределения $F^*(x)$ называется функция

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}. \tag{2.2}$$

Эта функция является кусочно-постоянной, ее значения получаются накоплением относительных частот в точках x_i. Функция $F^*(x)$ непрерывна слева, обладает всеми свойствами функции распределения случайной величины $F(x) = P(\xi < x)$ и является приближенным представлением последней.

2.2. Статистическая оценка параметров распределения

Анализ полигона, гистограммы и эмпирической функции распределения дает возможность сделать предположение о законе распределения изучаемой случайной величины. Данный закон может быть установлен и на основании теоретических предположений.

Затем возникает задача нахождения параметров принятого закона распределения. Значение параметра, полученное по результатам выборки, называется оценкой параметра. Любая оценка, полученная по выборке, всегда содержит элемент случайности. Для того, чтобы оценки давали хорошее приближение неизвестного параметра, к ним предъявляются определенные требования.

Несмещенной называется статистическая оценка $\tilde{\theta}$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любом объёме выборки, т. е. $M(\tilde{\theta}) = \theta$.

Эффективной называется статистическая оценка, которая (при данном объеме выборки) имеет минимально возможную дисперсию.

Состоятельной называется статистическая оценка, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру, т. е. $P(|\tilde{\theta} - \theta| < \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.

Оценки параметров разделяются на точечные и интервальные. Оценка называется точечной, если она выражается одним числом.

Точечной оценкой математического ожидания является выборочное среднее, которое для статистического ряда вычисляется следующим образом

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i. \tag{2.3}$$

Для интервального статистического ряда

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i. \tag{2.4}$$

Эта оценка является состоятельной и несмещенной. Точечной оценкой дисперсии является выборочная дисперсия $\overline{D}_в$, которая вычисляется по формуле

$$\overline{D}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \bar{x}^2.$$

Эта оценка является смещённой. Несмещенной оценкой дисперсии D_ξ является s^2.

Для статистического ряда

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2. \tag{2.5}$$

Для интервального статистического ряда

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} (x_i^* - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} (x_i^*)^2 n_i - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2. \tag{2.6}$$

Оценкой среднего квадратического отклонения служит корень из несмещенной оценки дисперсии, т. е. $s = \sqrt{s^2}$.

Оценка называется интервальной, если она задается в виде интервала. Обычно рассматриваются доверительные интервалы. Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (α_1, α_2), который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью $\gamma = 1 - \alpha$, т. е. $P(\alpha_1 < \theta < \alpha_2) = \gamma$. Число $\gamma = 1 - \alpha$ называется доверительной вероятностью, а значение α – уровнем значимости. На практике обычно используют уровни значимости: 0,1; 0,05; 0,01.

Доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины ξ при данном уровне значимости α и известной дисперсии $D_\xi = \sigma^2$ имеет вид

$$\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{2.7}$$

где t_γ определяется из условия $2\Phi(t_\gamma) = \gamma = 1 - \alpha$, или $\Phi(t_\gamma) = \gamma/2$ и

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа (приложение 1).

При неизвестной дисперсии генеральной совокупности используется формула

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha,\nu} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha,\nu} \frac{s}{\sqrt{n}}\right), \tag{2.8}$$

где $t_{\alpha,\nu}$ определяется с помощью таблицы значений распределения Стьюдента (приложение 2) по данному числу степеней свободы $\nu = n - 1$ и уровню значимости α. s – оценка среднего квадратического отклонения. Отметим, что при объеме выборки $n > 30$ вместо распределения Стьюдента можно пользоваться нормальным распределением.

2.3. Статистическая проверка статистических гипотез. Критерий χ^2 (Пирсона)

Статистической гипотезой H называется допущение относительно параметров или вида распределения изучаемой случайной величины ξ. Правило, по которому проверяемая гипотеза H принимается или отклоняется, называется статистическим критерием проверки гипотезы H.

Одним из наиболее распространённых критериев проверки непараметрических гипотез о виде функции распределения изучаемой случайной величины ξ является критерий χ^2 (Пирсона). Данный критерий проверяет гипотезу о возможном законе распределения и применяется для разных распределений.

Схема применения критерия χ^2 для проверки гипотезы H о законе распределения изучаемой случайной величины ξ заключается в следующем:

Рассматриваем гипотезу H_0 о законе распределения случайной величины ξ (дискретной или непрерывной);

Находим оценки $\bar{x}$ и s^2 неизвестных параметров предполагаемого закона распределения по формулам (2.4), (2.6);

Определяем частоты n_i, $i=\overline{1,k}$, с которыми встречаются в выборке каждое значение дискретной случайной величины или элементы выборки непрерывной случайной величины, принадлежащие каждому из заданных интервалов;

Находим теоретические вероятности $p_i = P(\xi = x_i)$ – для дискретной, $p_i = F(x_{i+1}) - F(x_i)$ – для непрерывной случайной величины.

Для нормального закона распределения имеем

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1}-\bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right); \qquad (2.9)$$

Вычисляем наблюдаемое значение критерия χ^2:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}; \qquad (2.10)$$

Контроль вычислений осуществляется равенством

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{np_i} - n = \chi^2_{набл}. \qquad (2.11)$$

Принимаем статистическое решение: гипотеза H_0 не противоречит выборке наблюдений на данном уровне значимости α, если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{\alpha,\nu}$, где $\nu = k - l - 1$ – число степеней свободы, а l – число параметров распределения.

Если же $\chi^2_{набл} \ge \chi^2_{\alpha,\nu}$, то гипотеза H_0 отклоняется и может быть выдвинута другая гипотеза H_1, которая проверяется по той же схеме.

Пример 1. Даны результаты измерения диаметров брёвен, которые поступают на распиловку деревообрабатывающего предприятия (табл. 6).

Таблица 6

36	39	43	45	26	34	50	33	36	57
29	40	31	34	17	47	39	35	41	28
25	30	39	36	49	42	24	27	20	52
36	33	18	32	56	37	40	29	31	46
38	19	28	33	42	26	35	37	34	48
44	22	36	49	30	27	40	32	41	43
45	38	24	37	46	36	29	25	39	52
50	21	38	34	41	47	29	31	28	35
44	55	39	30	27	32	34	40	54	36
25	53	45	33	43	37	26	42	28	51

Задание.

1. Построить интервальный статистический ряд.
2. Построить гистограмму и полигон относительных частот.
3. Найти эмпирическую функцию распределения и построить её график.
4. Вычислить выборочное среднее значение $\bar{x}$ и несмещённую оценку дисперсии s^2.
5. Определить гипотетическую плотность закона распределения.
6. Определить теоретические частоты и проверить согласование данных выборки с гипотетическим законом распределения с помощью критерия χ^2 (Пирсона) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.
7. Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

Решение.

Строим интервальный статистический ряд. Объем выборки $n = 100$. Количество интервалов $k = 1 + 3{,}2\lg 100 = 1 + 6{,}4 = 7{,}4$. Принимаем $k = 7$.

Определяем $x_{min} = 17$, $x_{max} = 57$ и находим размах выборки $W = 57 - 17 = 40$.

Длина интервала будет $h = 40/7$. Принимаем $h = 6$. Значения x разбиваем на интервалы равной длины.

Находим количество элементов выборки в каждом интервале, т. е. частоту n_i. Полученные значения делим на объем выборки и получаем относительные частоты ω_i. Полученные данные заносим в таблицу.

Таблица 7

Интервал $[x_i–x_{i+1})$	Середина интервала x_i^*	Частота n_i	Относительная частота $\omega_i = \frac{n_i}{n}$	Высота $\frac{n_i}{hn}$
[17–23)	20	6	0,06	0,01
[23–29)	26	15	0,15	0,025
[29–35)	32	22	0,22	0,037
[35–41)	38	26	0,26	0,043
[41–47)	44	16	0,16	0,027
[47–53)	50	10	0,1	0,017
[53–59)	56	5	0,05	0,008

Строим гистограмму относительных частот. На каждом интервале группировки статистического ряда строим прямоугольники с найденной высотой. Площадь каждого прямоугольника равна относительной частоте. Площадь всей гистограммы равна единице.

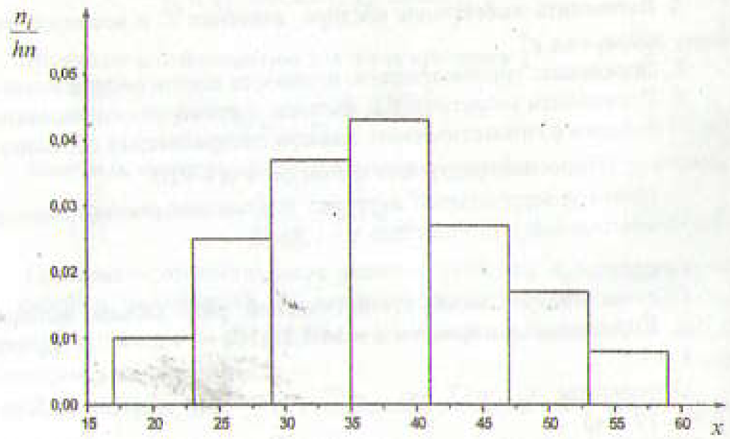

Рис. 9. Гистограмма относительных частот

Определим эмпирическую функцию распределения по формуле (2.2). Значение данной функции увеличивается на значение относительной частоты ω_i при переходе значения x через значение x_i^*.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 20, \\ 0{,}06, & 20 < x \le 26, \\ 0{,}21, & 26 < x \le 32, \\ 0{,}43, & 32 < x \le 38, \\ 0{,}69, & 38 < x \le 44, \\ 0{,}75, & 44 < x \le 50, \\ 0{,}95, & 50 < x \le 56, \\ 1, & x > 56. \end{cases}$$

Строим график полученной функции

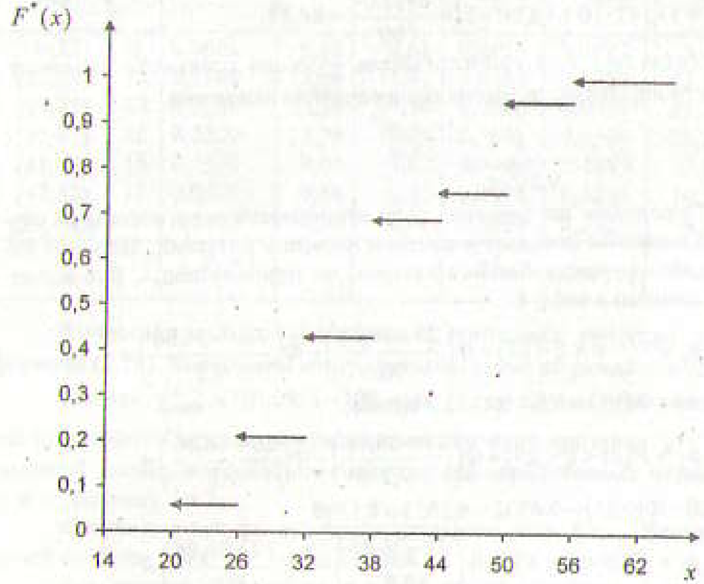

Рис. 10. Эмпирическая функция распределения

По виду гистограммы выдвигаем гипотезу H_0 о нормальном законе распределения диаметров бревен, которые поступают на распиловку деревообрабатывающего предприятия.

Данный закон содержит два параметра a и σ: $M_\xi = a$; $D_\xi = \sigma^2$.

Определим точечную оценку математического ожидания по формуле (2.4)

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(20\cdot 6 + 26\cdot 15 + 32\cdot 22 + 38\cdot 26 + 44\cdot 16 + 50\cdot 10 + 56\cdot 5) =$$

$$= \frac{3686}{100} = 36{,}86.$$

Несмещённую оценку дисперсии найдем по формуле (2.6)

$$s^2 = \frac{1}{99}\left(16{,}86^2\cdot 6 + 10{,}86^2\cdot 15 + 4{,}86^2\cdot 22 + 1{,}14^2\cdot 26 + 7{,}14^2\cdot 16 + \right.$$

$$\left. + 13{,}14^2\cdot 10 + 19{,}14^2\cdot 5\right) = \frac{8402{,}04}{99} = 84{,}87.$$

Тогда $s = 9{,}2$ и гипотетическая функция плотности соответствующего нормального закона распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{9{,}2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-36{,}86)^2}{2\cdot 9{,}2^2}}.$$

Определим по формуле (2.9) вероятности p_i, с которыми случайная величина попадает в соответствующий интервал. Значения интегральной функции Лапласа находим по приложению 1. Все вычисления заносим в табл. 8.

$$p_1 = P(-\infty < \xi < 23) = \Phi\left(\frac{23-36{,}86}{9{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-36{,}86}{9{,}2}\right) =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(1{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668.$$

$$p_2 = P(23 < \xi < 29) = \Phi\left(\frac{29-36{,}86}{9{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{23-36{,}86}{9{,}2}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}85) = 0{,}4332 - 0{,}3023 = 0{,}1309.$$

$$p_3 = P(29 < \xi < 35) = \Phi\left(\frac{35-36{,}86}{9{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{29-36{,}86}{9{,}2}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}85) - \Phi(0{,}20) = 0{,}3023 - 0{,}0793 = 0{,}2230.$$

$$p_4 = P(35 < \xi < 41) = \Phi\left(\frac{41-36{,}86}{9{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{35-36{,}86}{9{,}2}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}45) + \Phi(0{,}20) = 0{,}1736 + 0{,}0793 = 0{,}2529.$$

$$p_5 = P(41 < \xi < 47) = \Phi\left(\frac{47-36{,}86}{9{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{41-36{,}86}{9{,}2}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}10) - \Phi(0{,}45) = 0{,}3643 - 0{,}1736 = 0{,}1907.$$

$$p_6 = P(47 < \xi < 53) = \Phi\left(\frac{53-36{,}86}{9{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{47-36{,}86}{9{,}2}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}75) - \Phi(1{,}10) = 0{,}4591 - 0{,}3643 = 0{,}0948.$$

$$p_7 = P(53 < \xi < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty-36{,}86}{9{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{53-36{,}86}{9{,}2}\right) =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(1{,}75) = 0{,}5 - 0{,}4591 = 0{,}0409.$$

Таблица 8

Интервал	n_i	p_i	np_i	n_i-np_i	$(n_i-np_i)^2$	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$	$\frac{n_i^2}{np_i}$
[-∞;23)	6	0,0668	6,68	−0,68	0,4624	0,0692	5,3892
[23;29)	15	0,1309	13,09	1,91	3,6481	0,2787	17,1887
[29;35)	22	0,2230	22,30	−0,30	0,0900	0,0040	21,7040
[35;41)	26	0,2529	25,29	0,71	0,5041	0,0199	26,7299
[41;47)	16	0,1907	19,07	−3,07	9,4249	0,4942	13,4242
[47;53)	10	0,0948	9,48	0,52	0,2704	0,0285	10,5485
[53;+ ∞)	5	0,0409	4,09	0,91	0,8281	0,2025	6,1125
		$\sum p_i = 1$				$\chi^2_{набл} = 1{,}0971$	101,0971

Вычисляем выборочное значение статистики критерия χ^2 по формуле (2.10). Выполняем контроль вычислений по равенству (2.11).

Так как $\chi^2_{набл} = 101{,}0971 - 100 = 1{,}0971$, то вычисления выполнены правильно. Определим критическое значение критерия χ^2. Нормальный закон распределения содержит два определяемых параметра a и σ, поэтому $l = 2$.

Количество интервалов статистического ряда $k = 7$. Число степеней свободы $\nu = k - l - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$.

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ по приложению 3 находим $\chi^2_{\alpha;\nu} = \chi^2_{0{,}05;4} = 9{,}49$.

Таким образом, $\chi^2_{набл} < \chi^2_{\alpha;\nu}$, поэтому принимаем гипотезу о нормальном законе распределения случайной величины диаметров бревен с параметрами $a = 36{,}86$, $\sigma = 9{,}2$.

Определим доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии по формуле (2.8) с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$. Число степеней свободы будет $\nu = n - 1 = 99$. По приложению 2 определим $t_{\alpha;\nu} = t_{0{,}05;99} = 1{,}98$. Тогда получим

$$\left(36{,}86 - 1{,}98\frac{9{,}2}{\sqrt{100}}; 36{,}86 + 1{,}98\frac{9{,}2}{\sqrt{100}}\right) = (35{,}04; 38{,}68).$$

2.4. Элементы теории корреляции

Корреляционный анализ исследует взаимосвязь случайных величин. Предположим, что результаты эксперимента описываются двумя случайными величинами ξ и η. Предварительное представление о характере зависимости между ξ и η можно получить, если элементы выборки (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ отметить в виде точек на плоскости в выбранной системе координат. Эта точечная диаграмма называется корреляционным полем.

Распределение системы (ξ, η) характеризуется числовыми параметрами: математическими ожиданиями компонент M_ξ, M_η, которые определяют положение центра распределения; дисперсиями $D_\xi = \sigma^2_\xi$, $D_\eta = \sigma^2_\eta$, которые определяют меру рассеяния относительно центра; корреляционным моментом (ковариацией) $K_{\xi\eta} = M((\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta))$; коэффициентом корреляции $r = \dfrac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$, $|r| \le 1$.

Коэффициент корреляции отражает степень линейной зависимости между ξ и η. Если $|r| = 1$, то элементы выборки (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ лежат на прямой линии, а ξ и η линейно зависимы. Если ξ и η независимы, то $r = 0$.

Уравнения

$$y - M_\eta = r\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - M_\xi) \text{ и } x - M_\xi = r\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y - M_\eta)$$

называют уравнениями линейной регрессии η на ξ и ξ на η соответственно.

Рассмотрим оценки параметров линейной регрессии, если задана выборка парных значений (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_n

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i;$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2;$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{y}^2;$$

$$K_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \bar{x}\bar{y}; \qquad r_{xy} = \frac{K_{xy}}{s_x s_y}.$$

Эмпирическая функция линейной регрессии η на ξ и ξ на η соответственно задаётся уравнениями

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}); \; \bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy}\frac{s_x}{s_y}(y - \bar{y}).$$

Для проверки значимости коэффициента корреляции выдвигается гипотеза H_0 о равенстве коэффициента корреляции нулю. Вычисляется наблюдаемое значение статистики

$$t_{набл} = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}.$$

и сравнивается с табличным при заданном уровне значимости α: $t_{табл} = t_{\alpha,n-2}$

Если $t_{набл} \ge t_{\alpha,n-2}$, то гипотеза об отсутствии корреляционной связи между случайными величинами отвергается. Если же $t_{набл} < t_{\alpha,n-2}$, то нет основания отвергать нулевую гипотезу о некоррелированности случайных величин ξ и η.

Выборку большого объёма задают в виде корреляционной таблицы. С этой целью группируют значения ξ и η по m и k интервалах длиной h_x и h_y, а в клетки (i, j) таблицы записывают частоты n_{ij} для каждой комбинации интервалов. В дальнейших вычислениях используются середины интервалов и соответствующие частоты.

Чтобы упростить вычисления, вводятся условные переменные

$$u = \frac{x - c_x}{h_x};\ v = \frac{y - c_y}{h_y}.$$

За условные нули c_x и c_y принимаются середины интервалов с наибольшей частотой

$$x = h_x u + c_x; \qquad y = h_y v + c_y;$$

$$M_x = h_x M_u + c_x; \quad M_y = h_y M_v + c_y;$$

$$D_x = h_x^2 D_u; \qquad D_y = h_y^2 D_v;$$

$$\sigma_x = h_x \sigma_u; \qquad \sigma_y = h_y \sigma_v;$$

$$r_{xy} = r_{uv}.$$

Связь между числовыми характеристиками будет:

$\bar{x} = \bar{u} h_x + c_x$; $\bar{y} = \bar{v} h_y + c_y$; $s_x = h_x s_u$; $s_y = h_y s_v$; $r_{xy} = r_{uv}$.

Приведем формулы для вычисления статистических оценок

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i n_i;\ \bar{v} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} u_j n_j;$$

$$s_u^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}(u_i - \bar{u})^2 n_i = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i - \frac{n}{n-1}\bar{u}^2;$$

$$s_v^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k}(v_j - \bar{v})^2 n_j = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k} v_j^2 n_j - \frac{n}{n-1}\bar{v}^2;$$

$$K_{uv} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}(u_i - \bar{u})(v_j - \bar{v}) n_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} u_i v_j n_{ij} - \overline{uv};$$

$$r_{uv} = \frac{K_{uv}}{s_v s_u}.$$

Пример.

Даны результаты зависимости между переменными x и y (табл. 9).

Задание.

1. Определить средние выборочные значения $\bar{x}$, $\bar{y}$.
2. Определить несмещённые оценки дисперсий S_x, S_y.
3. Вычислить коэффициент корреляции r_{xy}.
4. Найти эмпирические линейные функции регрессии η на ξ и ξ на η; отобразить эти прямые на корреляционном поле.

5. Проверить соответствие линейной регрессии с результатами наблюдения при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Таблица 9

y_j \ x_i	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	n_j
41–44	1	5	2	–	–	8
44–46	1	9	4	–	–	14
46–48	–	4	40	8	–	52
48–50	–	–	1	12	2	15
50–52	–	–	1	3	7	11
n_i	2	18	48	23	9	n=100

Решение.

Находим середины интервалов группировки статистических данных. Для того, чтобы упростить вычисления, введём новые величины

$$u_i = \frac{x_i - c_x}{h_x}, \qquad v_i = \frac{y_i - c_y}{h_y},$$

где $c_x = 40$, $c_y = 47$, $h_x = 10$, $h_y = 2$.

В табл. 10 заносим середины заданных интервалов и новые переменные

Таблица 10

v_j	u_i	−2	−1	0	1	2	
	y_j \ x_i	20	30	40	50	60	n_j
−2	43	1	5	2	–	–	8
−1	45	1	9	4	–	–	14
0	47	–	4	40	8	–	52
1	49	–	–	1	12	2	15
2	51	–	–	1	3	7	11
	n_i	2	18	48	23	9	n=100

Вычислим средние значения:

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum n_i u_i = \frac{1}{100}(-2\cdot 2 - 1\cdot 18 + 1\cdot 23 + 2\cdot 9) = 0{,}19;$$

$$\bar{v} = \frac{1}{n}\sum n_j v_j = \frac{1}{100}(-2\cdot 8 - 1\cdot 14 + 1\cdot 15 + 2\cdot 11) = 0{,}07.$$

Определим несмещённые оценки дисперсии:

$$s_u^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} n_i u_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{u}^2 = \frac{1}{99}(4\cdot 2 + 1\cdot 18 + 1\cdot 23 + 4\cdot 9) - \frac{100}{99}\cdot 0{,}19^2 = 0{,}8221;$$

$$s_u = 0{,}9067;$$

$$s_v^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k} n_j v_j - \frac{n}{n-1}\bar{v}^2 = \frac{1}{99}(4\cdot 8 + 1\cdot 14 + 1\cdot 15 + 4\cdot 11) - \frac{100}{99}\cdot 0{,}07^2 = 1{,}0557;$$

$$s_v = 1{,}0275.$$

Определим корреляционный момент

$$K_{uv} = \frac{1}{n-1}\sum n_{ij} u_i v_j - \overline{uv} = \frac{1}{99}(4\cdot 1 + 2\cdot 5 + 2\cdot 1 + 1\cdot 9 + 1\cdot 12 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 4\cdot 7) - 0{,}19\cdot 0{,}07 = 0{,}7441.$$

Коэффициент корреляции будет

$$r_{uv} = \frac{K_{uv}}{S_u S_v} = 0{,}8.$$

Тогда

$\bar{x} = c_x + \bar{u}h_x = 40 + 0.19\cdot 10 = 41{,}9;$

$\bar{y} = c_y + \bar{v}h_y = 47 + 0.07\cdot 2 = 47{,}14;$

$s_x = h_x \cdot s_u = 10\cdot 0{,}9067 = 9{,}067;$

$s_y = h_y \cdot s_v = 2\cdot 1{,}0275 = 2{,}055;$

$r_{xy} = r_{uv} = 0{,}8.$

Запишем эмпирические линейные функции регрессии η на ξ и ξ на η.

$$\bar{y}_x - 47{,}14 = 0{,}8\cdot\frac{2{,}055}{9{,}067}(x - 41{,}9); \quad \bar{y}_x = 0{,}181x + 39{,}55;$$

$$\bar{x}_y - 41{,}9 = 0{,}8\cdot\frac{9{,}067}{2{,}055}(y - 47{,}14); \quad \bar{x}_y = 3{,}5245y - 124.$$

Отобразим эти прямые на рис. 11.

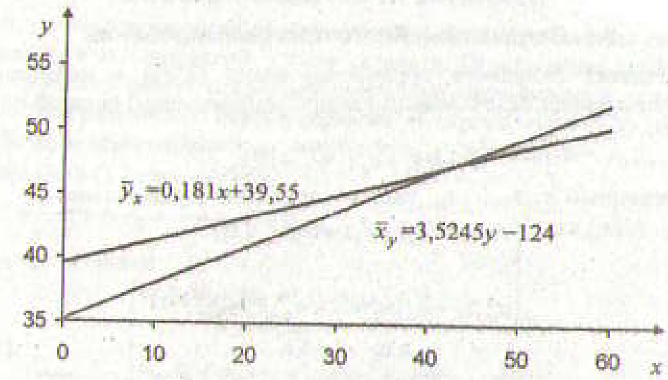

Рис. 11. Линейные функции регрессии

Проверим соответствие линейной регрессии с результатами наблюдения

$$t_{набл} = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}8\sqrt{98}}{\sqrt{1-0{,}64}} = 13{,}144.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ при степени свободы $\nu = n - 2 = 98$ по табл. (дополнение 3) находим $t_{\alpha;\nu} = t_{0{,}05;98} = 1{,}98$.

Так как $t_{набл} > t_{табл}$, то линейная модель зависимости между случайными величинами принимается.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

3.1. Задача линейного программирования

Задачей линейного программирования (ЗЛП) в нормальной форме называется задача максимизации (минимизации) целевой функции

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{3.1}$$

по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющим неравенствам

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}\,, \tag{3.3}$$

где $c_j, a_{ij}, b_j,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ постоянные числа. Запись $i = \overline{1,m}$ означает, что $i = 1, 2, \dots, m$.

В матричной форме задача имеет вид

$$Z = C'X \ \to\ \max\,(\min), \tag{3.4}$$

$$AX \le b, \tag{3.5}$$

$$X \ge 0, \tag{3.6}$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\quad A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\quad j = \overline{1,n}\,,\quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

$$A = [A_1, A_2, \cdots, A_n].$$

X называется вектором-переменной, b – вектор ограничений, C – вектор стоимости, A_j – вектора условий, A – матрица условий, символ (′) означает транспонирование.

Наряду с нормальной формой задачи линейного программирования, широкое рассмотрение получила каноническая форма, под которой понимается следующая задача

$$Z = C'X \ \to\ \max\,(\min), \tag{3.7}$$

$$AX = b, \tag{3.8}$$

$$X \ge 0. \tag{3.9}$$

Две формы задачи линейного программирования отличаются

лишь типом ограничений. В нормальной форме ограничения типа неравенств, в канонической – типа равенств. Ограничения типа неравенств можно свести введением свободных переменных к ограничениям типа равенств. В первое неравенство ограничений (3.2) добавим свободную переменную x_{n+1}, второе – x_{n+2}, последнее – x_{n+m}, тогда задача (3.1)-(3.2) примет вид

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + \dots + 0x_{n+m} \to\ \max\,(\min) \tag{3.10}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{3.11}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n+m}\,. \tag{3.12}$$

И наоборот, каждое ограничение типа равенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде двух ограничений типа неравенств

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i, \\ -(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) \le -b_i. \end{cases}$$

Поэтому задачи в нормальной и канонической форме эквивалентны.

Заметим, что задачу минимизации целевой функции Z можно рассматривать как задачу максимизации функции $-Z$, так как $\min Z = -\max(-Z)$.

3.2. Геометрический метод решения задачи линейного программирования

Геометрический (графический) метод применяется для решения ЗЛП в нормальной форме, когда ограничения содержат две переменные. В случае большего числа переменных применение этого метода становится затруднительным.

В этом случае задача имеет вид

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min), \tag{3.13}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3.14}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{3.15}$$

Рассмотрим плоскость x_1Ox_2 переменных x_1 и x_2. Уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, есть уравнение прямой в этой плоскости. Данная прямая разобьёт плоскость x_10x_2 на две полуплоскости. В одной из этих полуплоскостей будет выполнено неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$, а в другой – противоположное неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1$. Чтобы установить, в какой из двух полуплоскостей выполняется нужное нам неравенство, надо подставить в его левую часть координаты какой-нибудь точки, проще всего начала координат. Например, решением неравенства $x_1 + x_2 \le 5$ будет полуплоскость, содержащая начало координат, так как в точке (0;0) это неравенство выполняется.

Итак, решением каждого из неравенств системы (3.14) является некоторая полуплоскость, а решением систем неравенств (3.14) и (3.15) будет область D допустимых решений задачи ЛП – пересечение этих полуплоскостей и неотрицательного квадранта (3.15). При этом возможны 4 типа областей: а) ограниченный выпуклый многоугольник (рис. 12, 13); б) неограниченная многоугольная область (рис. 14); в) одна точка (рис.15); с) пустое множество (рис. 16), когда система неравенств (3.14)-(3.15) несовместна.

Область D называют многоугольником допустимых решений системы (3.14)-(3.15), а вершины многоугольника – крайними точками.

Целевая функция (3.13) задает на плоскости семейство параллельных прямых

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C, \qquad (3.16)$$

соответствующих различным значениям постоянной величины C и называемых линиями уровня. Во всех точках этой прямой значение Z постоянно и равно C. Если C менять от $(-\infty)$ до $(+\infty)$ непрерывно увеличивая, то линия уровня, непрерывно смещаясь параллельно самой себе, "зачертит" всю плоскость.

Нормальный вектор $\bar{N}(c_1; c_2)$ к линиям уровня (3.16) есть градиент целевой функции $\operatorname{grad} Z = \left\{\frac{\partial Z}{\partial x_1}; \frac{\partial Z}{\partial x_2}\right\}$ показывает направление возрастания целевой функции. Перемещение в противоположном направлении $-\bar{N}$ приводит к уменьшению целевой функции.

Чтобы решить задачу ЛП, требуется найти такую точку области допустимых решений D, через которую проходит линия уровня (3.16), соответствующая наибольшему (наименьшему) значению Z.

Выберем из семейства (3.16) любую прямую, пересекающую многоугольник допустимых решений, и будем смещать ее в направлении вектора $\bar{N}$, в случае задачи на максимум ($-\bar{N}$ задача на минимум), до такого предельного положения, когда она касается области D, в ее крайнем положении. Прямую, которая имеет с областью D хотя бы одну общую точку, и такую, что вся область D лежит по одну сторону от прямой, будем называть опорной по отношению к области D. Точки, лежащие на опорной прямой, будут решением задачи.

Таким образом, решение задачи ЛП находится в вершинах многоугольника допустимых решений.

Возможны следующие случаи:

1. Линия уровня (3.16) пройдёт через вершину F (рис. 12) многоугольника так, что весь многоугольник D будет расположен по одну сторону от прямой (3.16). Задача (3.13) в этом случае разрешима и имеет единственное решение, $Z_{\max} = Z(F)$, $Z_{\min} = Z(A)$.

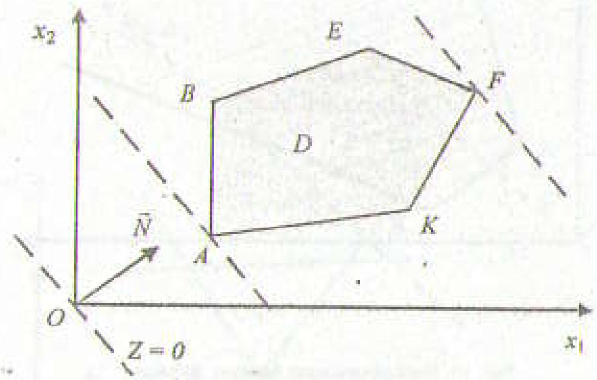

Рис. 12. Единственное решение

2. Линия уровня (3.16) совпадает с одной из сторон EF многоугольника D (рис. 13). В этом случае задача (3.13) разрешима и имеет бесконечное множество решений: форма Z достигает экстремального значения в области D во всех точках стороны EF многоугольника D, совпадающей с линией уровня (3.16).

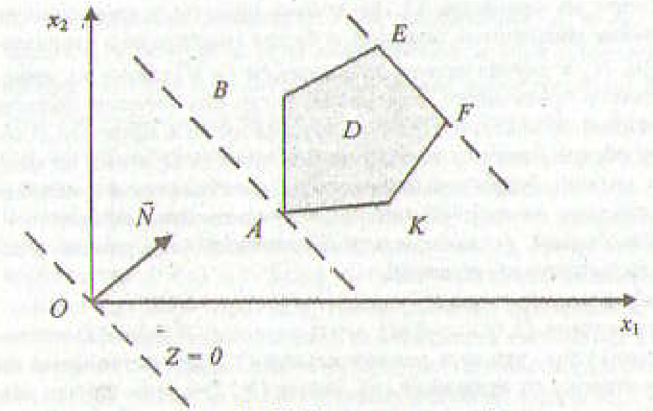

Рис.13. Множество решений

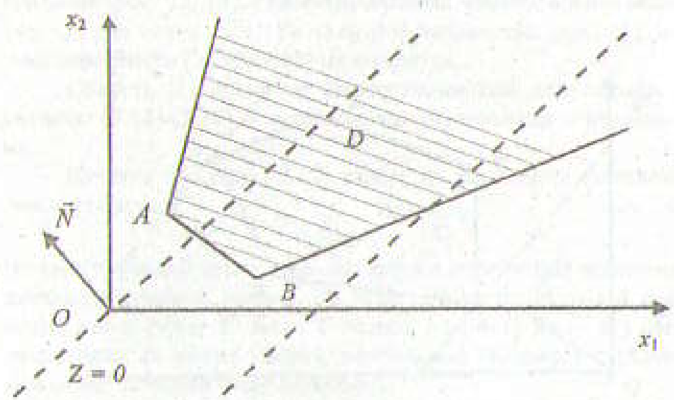

Рис. 14. Неограниченная целевая функция

3. Как бы мы не уменьшали (увеличивали) значение C, линия уровня $Z = C$ имеет общие точки с областью D (рис. 14). В этом случае форма Z в области D максимального (минимального) значения не достигает, задача (3.13) неразрешима, $Z_{\min} = -\infty$, $Z_{\max} = +\infty$.

4. Область D состоит из единственной точки A (рис. 15). В этом случае максимум и минимум достигаются в одной точке, $Z_{\min} = Z_{\max} = Z(A)$.
5. Задача не имеет решения, когда область допустимых решений является пустым множеством (рис. 16).

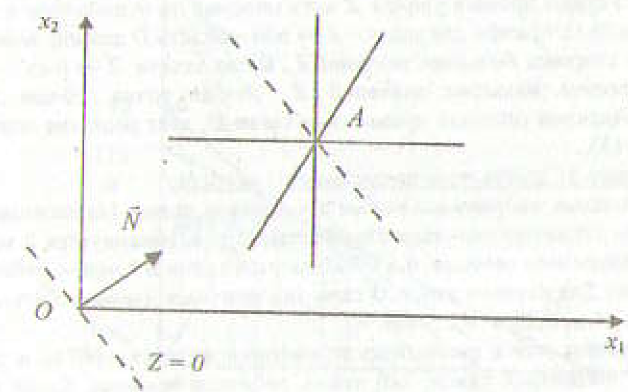

Рис. 15. Одна точка

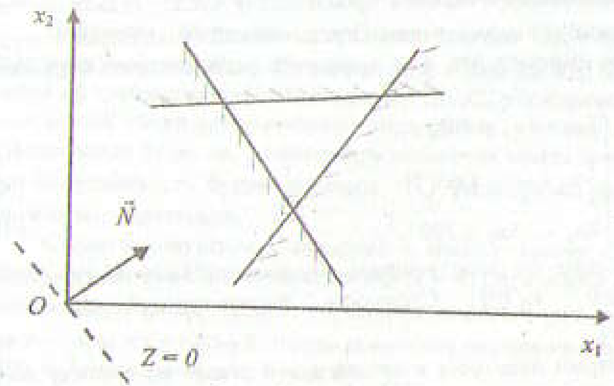

Рис. 16. Пустое множество

Итак, геометрический метод решения задачи (3.13) с ограничениями (3.14) – (3.15) состоит из следующих этапов.

1. Находим многоугольник D допустимых решений ЗЛП, т. е. решение системы неравенств (3.14)) – (3.15).
2. Выбрав произвольным образом C, строим прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = C$ и вектор $\vec{N} = \operatorname{grad} Z = \{c_1; c_2\}$.
3. Перемещая (3.13) параллельно самой себе, убеждаемся в том, что среди прямых уровня Z есть опорная по отношению к области D, причём для задачи $Z \to \min$ область D должна лежать со стороны больших значений Z, а для задачи $Z \to \max$ – со стороны меньших значений Z. Любая точка, общая для найденной опорной прямой в области D, даёт решение задачи (3.13).

Пример 3. Задача по использованию ресурсов.

Мебельная фабрика выпускает стулья двух типов. На изготовление одного стула первого типа стоимостью 8 у. е. расходуется 2 м. п. досок стандартного сечения, 0,5 м^2 обивочной ткани и 2 чел.-ч рабочего времени. Для стульев второго типа аналогичные данные составляют: 12 у. е., 4 м, 0,25 м^2 и 2,5 чел.-ч.

Допустим, что в распоряжении фабрики имеется 4440 м. п. досок, 65 м^2 обивочной ткани, 320 чел.-ч. рабочего времени. Какое количество стульев каждого типа надо изготовить, чтобы в рамках этих ресурсов стоимость произведенной продукции была максимальной?

Решение. Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 и x_2 запланированное к производству число стульев соответственно первого и второго типов. Ограниченный запас сырья и трудовых ресурсов означает, что x_1 и x_2 должны удовлетворять неравенствам

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 440, & \text{(I)} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \le 65, & \text{(II)} \\ 2x_1 + 2{,}5x_2 \le 320. & \text{(III)} \end{cases}$$

Кроме того, по смыслу задачи они должны быть неотрицательными: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Стоимость произведенной продукции $Z = 8x_1 + 12x_2$.

Рассмотрим плоскость и введем в ней декартову систему координат $x_1 0 x_2$. Построим на плоскости $x_1 0 x_2$ граничные прямые, предварительно определив точки пересечения данных прямых с осями координат (рис. 17). Подставив в неравенства координаты какой-нибудь точки, не лежащей на граничной прямой (чаще $O(0;0)$), найдем, какие полуплоскости определяют наши неравенства.

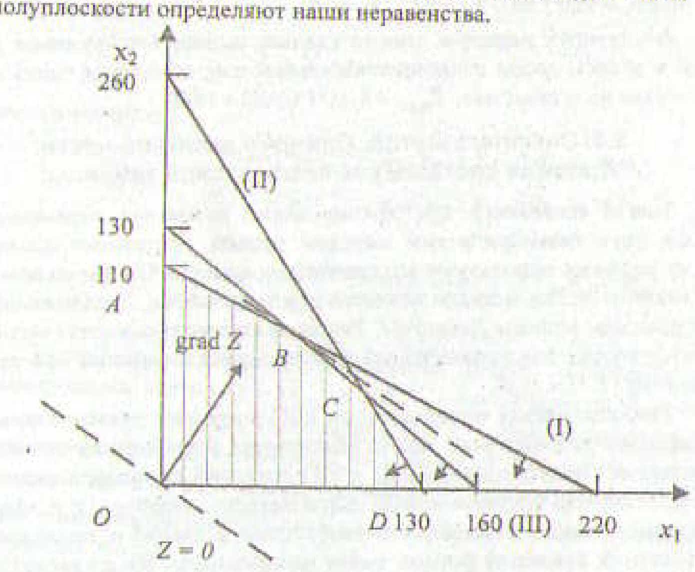

Рис. 17. Иллюстрация геометрического метода

Например, построим граничную прямую $2x_1 + 4x_2 = 440$ (I). Подставив в неравенство (I) координаты какой-нибудь точки, не лежащей на граничной прямой, например $O(0;0)$, убеждаемся, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству, поэтому искомой полуплоскостью будет та, в которой расположена взятая точка. Выбранную полуплоскость будем отмечать $(\uparrow)$. Аналогично поступим и с другими неравенствами.

Область допустимых значений – многоугольник $OABCD$. Построим $\operatorname{grad} Z = (8, 12)$ и линию уровня $Z = 0$. Перемещая ее в направлении вектора $\operatorname{grad} Z$, видим, что наибольшее значение целевой функции достигается в точке B. Решая совместно уравнения двух прямых (I и III), найдем координаты точки B:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 440, \\ 2x_1 + 2{,}5x_2 = 320 \end{cases}$$

Из первого уравнения вычитая второе получим:

$1{,}5x_2 = 120 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 80, \quad x_1 = 60.$

Анализируя решение, можно сделать вывод, что трудовые ресурсы и запасы досок использованы полностью, обивочная ткань использована не полностью, $Z_{max} = 8 \cdot 60 + 12 \cdot 80 = 1440$.

3.4. Симплекс-метод. Принцип оптимальности. Правила составления симплексной таблицы

Задачи линейного программирования с числом переменных больше двух геометрическим методом решить достаточно сложно. Для их решения используют аналитические методы. Одним из основных аналитических методов является симплекс-метод, предложенный американским ученым Данцигом. Теория и алгоритм симплекс-метода строится только для канонической формы задачи линейного программирования (3.7) – (3.9).

Геометрическая интерпретация ЗЛП позволяет установить, что оптимальное решение этой задачи достигается в крайних точках многоугольника (многогранника при $n \geq 3$) решений системы ограничений. Поэтому это решение можно найти методом перебора, т. е. найти все крайние точки многогранника допустимых решений и, вычислив в них значения линейной формы, найти минимальное. Но с увеличением числа переменных n и числа ограничений m число крайних точек стремительно растёт, поэтому отмеченный метод приводит к огромным вычислениям.

Выход из создавшегося положения был найден с помощью простого рассуждения. Пусть найдена некоторая крайняя точка A. Предположим, что по условиям задачи можно узнать, уменьшается или увеличивается линейная форма Z при движении от A к некоторым другим крайним точкам B и E. Если в одном из направлений линейная форма уменьшается, то нет смысла находить точку в этом направлении, ибо в ней Z имеет меньшее значение, чем в исходной. Двигаясь дальше по направлениям, вдоль которых Z увеличивается, можно существенно сократить количество вычислений. Приведённое рассуждение и есть описательное обоснование симплекс-метода.

Рассмотрим ЗЛП в канонической форме. Предполагаем, что среди векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ условий найдутся m линейно независимых единичных векторов (базис). Соответствующие им переменные

(компоненты вектора X) назовем базисными – БП, а оставшиеся – свободными переменными (СП). Не ограничивая общности, предполагаем, что базисными являются первые m переменных. Тогда ЗЛП приобретает вид

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max. \tag{3.17}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + \qquad a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 + \qquad a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ \qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.18}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.19}$$

Будем называть решением (планом) задачи линейного программирования вектор $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений (3.18)-(3.19). План задачи, для которого линейная форма достигает максимума (минимума), называется оптимальным. План называется опорным, если вектора условий A_j соответствующие ненулевым компонентам, линейно независимы. Решение задачи состоит из следующих этапов.

1. Построение первоначального опорного плана. Значения свободных переменных принимаем равными нулю $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$, (СП = 0), тогда $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \cdots, x_m = b_m$ и получим начальный опорный план $X^0 = (b_1; b_2; \cdots; b_m; 0; \cdots; 0)$. Если все $b_i > 0$, то план называется невырожденным.

Если задача задана в нормальной форме, то всегда легко найти первоначальный базисный план, переходя к канонической форме. За единичный базис нужно взять векторы $A_1, A_2, \cdots, A_m$, соответствующие свободным переменным.

При решении ЗЛП симплекс-методом удобно пользоваться симплексными таблицами, которые составляются для каждого плана.

Симплексная таблица строится следующим образом. В первую строку заносятся коэффициенты линейной формы. Вторая строка служит для обозначений векторов. Последовательно в столбцах записывают: в первом – обозначения базисных векторов $A_1, A_2, \cdots, A_m$, во втором – коэффициенты линейной формы Z, соответствующие базисным векторам; в последующих столбцах записывается вектор-столбец свободных членов $b=(b_1;b_2;\cdots;b_m)$ и векторы-столбцы коэффициентов системы ограничений $A_1, A_2, \cdots, A_m$.

Вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных будет $C_Б=(c_1;c_2;\cdots;c_m)$.

Последнюю, $(m+1)$-ю строку называют индексной строкой. В нее заносят значение целевой функции для начального опорного плана

$$\Delta_0 = Z_0 = C_Б b = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i \qquad (3.20)$$

и оценки переменных

$$\Delta_j = z_j - c_j = C_Б A_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, \quad j=\overline{1,n}. \qquad (3.21)$$

Оценки базисных переменных всегда равны нулю.

Таблица 11

Базис	$C_Б$	b	c_1 / A_1	c_2 / A_1	… / …	c_m / A_m	c_{m+1} / A_{m+1}	… / …	c_j / A_j	… / …	c_n / A_n	θ	
A_1	c_1	b_1	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1k}	…	a_{1n}		
A_2	c_2	b_2	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2k}	…	a_{2n}		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮		
A_l	c_l	b_l	0	0	…	0	$a_{l,m+1}$	…	a_{lk}	…	a_{ln}	θ_l	→
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮		
A_m	c_m	b_m	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mk}	…	a_{mn}		
z_j-c_j		Z_0	0	0	…	0	Δ_{m+1}		Δ_k		Δ_n		
									↑				

2. Критерий оптимальности опорного плана. Критерием оптимальности рассматриваемого решения (плана) является выполнение условия

$$\Delta_j = z_j - c_j \ge 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (3.22)$$

Если это условие не выполняется для некоторого номера j, тогда следует искать новый план, при котором значение функции Z было бы больше. Для этого переходим к новому базису. Чтобы определить, какой вектор следует ввести в базис, просматривают последнюю строку. Вектор, соответствующий минимальному, отрицательному

Δ_j, вводится в базис (если имеется несколько таких одинаковых Δ_j, то берется любой). Пусть

$$\Delta_k = \max_{\Delta_j<0} |\Delta_j|, \qquad (3.23)$$

тогда вектор A_k нужно ввести в базис. Столбец, содержащий число Δ_k, называется разрешающим столбцом симплексной таблицы.

Чтобы определить, какой вектор нужно вывести из базиса, вычисляют минимальное отношение координат b_i вектора A_0 к положительным элементам c_{ik} разрешающего столбца, т. е. находятся

$$\theta_0 = \min_i \frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0. \qquad (3.24)$$

Для этого вычисляют симплексные отношения $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ik}}$ для $a_{ik}>0$ и помещают их в столбец θ, затем среди них выбирают наименьшее – θ_0. Пусть $\theta_0 = \dfrac{b_l}{a_{lk}}$, тогда вектор A_l нужно исключить из базиса. В симплексной таблице строка, содержащая число b_l, называется разрешающей, а элемент a_{lk}, стоящий на пересечении разрешающих столбца и строки, – разрешающим (ключевым) элементом.

Разрешающие строка и столбец в симплексной таблице (табл. 11) выделяются двойными линиями и отмечаются стрелками.

3. Переход к новому опорному плану. После того, как определены разрешающие строка и столбец, строится новая симплексная таблица. В первом столбце записывается новый базис. Он отличается от старого одним вектором: вектор A_l заменяется вектором A_k. Соответственно заменяется коэффициент c_l коэффициентом c_k в столбце $C_Б$.

Новые координаты векторов $A_1, A_2, \cdots, A_n$ находим по формулам:

$$\begin{cases} (b_i)_{нов} = b_i - \dfrac{b_l}{a_{lk}} c_{ik} \quad (i \ne l);\ (b_l)_{нов} = \dfrac{b_l}{a_{kl}}; \\ (a_{ij})_{нов} = a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik}\ (i \ne l);\ (a_{lj})_{нов} = \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}}. \end{cases} \qquad (3.25)$$

Наиболее просто вычисляются элементы строки l и столбца k, являющихся разрешающими в старой таблице. В столбце k новой таблицы все $a_{ik}=0$, кроме $a_{lk}=1$. Элементы строки l получаются из соответствующих элементов старой таблицы делением на a_{lk}. Остальные элементы a_{ij} и b_i вычисляются по "правилу прямоугольника". В старой таблице строим прямоугольник с вершинами $a_{ij}, a_{lj}, a_{lk}, a_{ik}$. Перемножаем элементы $a_{lj} \cdot a_{ik}$, не лежащие на одной диагонали с a_{ij}, делим результат на a_{lk} и полученное число вычитаем из a_{ij}. В результате получаем новое значение a_{ij}. Аналогично вычисляются и значения $(b_i)_{нов}$. Затем находим Δ_0, Δ_j по этой же схеме.

Контроль вычислений. Для контроля вычислений значения оценок последней индексной строки вычисляются по схеме прямоугольника (3.25) и по формулам (3.20)-(3.21). Полученные двумя способами значения должны совпадать.

После заполнения новой таблицы определяем план X_2 и устанавливаем, является ли он оптимальным. Все отличные от нуля координаты вектора X_2 находятся в столбце вектора A_0, номер (индекс) координаты совпадает с номером базисного вектора, стоящего в той же строке, что и сама координата.

Если при решении задачи на максимум в новой таблице все оценки $\Delta_j \geq 0$, то план X_2 является оптимальным; если же хотя бы одна из разностей $\Delta_j < 0$, то нужно строить новую симплексную таблицу по тем же правилам. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получен оптимальный план, т. е. пока не станут положительными все оценки, $\Delta_j \geq 0$.

Может встретиться случай, когда одна или несколько оценок $\Delta_j < 0$, а столбцы, соответствующие этим оценкам, не содержат положительных элементов a_{ij}. Тогда линейная форма Z не ограничена.

Замечание. Для задачи $z \to \min$ используется следующий критерий оптимальности плана: если все оценки $\Delta_j \leq 0$, то данный план оптимален; в противном случае выбирается новый базисный вектор, соответствующий $\max\limits_{\Delta_j > 0} \Delta_j$.

Если в результате преобразования симплекс-таблицы нет положительных симплексных отношений 0 для разрешающей строки, то задача не имеет конечного решения.

Метод искусственного базиса (М-задача).

Если каноническая задача линейного программирования не

имеет единичного базиса или базисный план является недопустимым (содержит отрицательные значения), то вводится искусственный базис. К левым частям равенств добавляют искусственные переменные x_j, $j = \overline{n+1, n+m}$ и переходят к расширенной задаче (М-задаче)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} & = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m},$$

где M – произвольное достаточно большое положительное число.

Единичные векторы $A_{n+1}, A_{n+2}, \cdots, A_{n+m}$, соответствующие искусственным переменным, образуют базис.

Решая М-задачу симплекс-методом, через конечное число итераций, придем к оптимальному плану, либо установим неразрешимость М-задачи.

М-задача имеет следующие особенности.

1. Искусственные векторы находятся лишь в столбце базисных векторов и могут не записываться в саму таблицу. Искусственные базисные векторы исчезают из таблицы по мере их исключения.

2. Последняя индексная строка разделяется на две строки: в верхнюю записываются свободные слагаемые оценок, а в нижнюю коэффициенты при M.

3. Критерий оптимальности сначала проверяется по коэффициентам M, и при их полном исключении задача решается обычным образом.

4. Если в оптимальном плане М-задачи все искусственные переменные равны нулю, то данный план будет решением исходной задачи.

5. Если в оптимальном плане М-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, т. е. ее условия несовместны.

Пример 3. На предприятии имеются бревна длиной 6 м, которые необходимо разрезать на заготовки длиной 2,8 м в количестве 800 шт., 2,1 м – 900 шт., 1,8 м – 6000 шт.

Необходимо составить оптимальный план раскройки материала, который обеспечивает минимальные отходы, при условии выполнения плана по выходу заготовок.

Решение. Сначала составим математическую модель нашей задачи. Возможные варианты раскроя и отходы при каждом из них запишем в виде табл. 12.

Таблица 12

Длина заготовки	Варианты раскроя						Количество заготовок
	1	2	3	4	5	6	
2,8 м	2	1	1	0	0	0	800
2,1 м	0	1	0	2	1	0	900
1,8 м	0	0	1	1	2	3	6000
Остаток, м	0,4	1,1	1,4	0	0,3	0,6	

Обозначим через x_i количество бревен, разрезанных по i-му варианту $\left(i=\overline{1,6}\right)$. Тогда суммарный остаток отходов запишется в виде линейной функции

$$Z = 0{,}4x_1 + 1{,}1x_2 + 1{,}4x_3 + 0x_4 + 0{,}3x_5 + 0{,}6x_6 . \qquad (3.26)$$

При этом должны выполняться условия выполнения плана по количеству заготовок, т. е.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 800, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 900, \\ x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 6000, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j=\overline{1,6}. \qquad (3.27)$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо найти $\min Z$ при ограничениях (3.27). Поскольку $\min Z = -\max(-Z(x))$, то вместо задачи минимизации функции (3.26) будем решать задачу максимизации функции

$$\widetilde{Z} = -\left(0{,}4x_1 + 1{,}1x_2 + 1{,}4x_3 + 0x_4 + 0{,}3x_5 + 0{,}6x_6\right) \qquad (3.28)$$

при ограничениях (3.27).

Решать эту задачу будем симплекс-методом. Для нахождения начального плана необходимо выделить единичный базис из матрицы условий

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица не содержит единичных векторов. Однако, когда мы первое уравнение ограничений (3.27) разделим на 2, а третье на 3, то получим равнозначную систему ограничений

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 400 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 900 \\ \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 + x_6 = 2000 \end{cases} ,x_j \ge 0,\ j=\overline{1,6} \qquad (3.29)$$

Матрица условий этой системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.30)$$

и содержит два единичных вектора $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. До единичного базиса нам не хватает одного единичного вектора. Во второе уравнение добавим искусственную переменную x_7. В результате чего получим М-задачу с одной искусственной переменной и единичным базисом.

$$\widetilde{Z} = -0{,}4x_1 - 1{,}1x_2 - 1{,}4x_3 - 0{,}3x_5 - 0{,}6x_6 - Mx_7 \to \max . \qquad (3.31)$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 400, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 900, \\ \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 + x_6 = 2000, \end{cases} \quad j=\overline{1,7}. \qquad (3.32)$$

В качестве единичного базиса возьмём векторы A_1, A_7, A_6. Первоначальный базисный план расширенной задачи будет $\widetilde{X}_0 = (400, 0, 0, 0, 0, 2000, 900)$.

Запишем первоначальную симплекс-таблицу для полученной М-задачи.

В столбцах A_j стоят коэффициенты при x_j из ограничений (3.32).

Для проверки плана на оптимальность используем критерий оптимальности, который состоит в неотрицательности элементов последних двух строк. Проверяем план $\widetilde{X}_0$ на оптимальность. Для этого вычисляем оценки Δ_j. Оценки Δ_j находятся следующим методом: перемножаются элементы столбца $C_Б$ на соответствующие элементы столбца A_j и их результаты складываются, после чего от полученной суммы отнимается величина c_j.

Таблица 13

i	Базис	$C_Б$	c_j / b	$-0{,}4$ / A_1	$-1{,}1$ / A_2	$-1{,}4$ / A_3	0 / A_4	$-0{,}3$ / A_5	$-0{,}6$ / A_6	$-M$ / A_7	θ
1	A_1	$-0{,}4$	400	1	1/2	1/2	0	0	0	0	
2	A_7	$-M$	900	0	1	0	2	1	0	1	450 →
3	A_6	$-0{,}6$	2000	0	0	1/3	1/3	2/3	1	0	6000
4	$\Delta_j = z_j - c_j$		1360	0	0,9	1	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0	0	
5	M		900	0	-1	0	-2 ↑	-1	0	0	

Например, $\Delta_2 = (-0{,}4)\cdot\frac{1}{2} + (-M)\cdot 1 + (-0{,}6)\cdot 0 - (-1{,}1) = 0{,}9 - M$.

В четвёртой строке столбца A_2 записываем 0,9, а в пятой -1 – коэффициент при M. Вначале поверяем элементы последней строки, т. е. коэффициенты при M. Так как среди оценок Δ_j имеются отрицательные, а именно, Δ_2, Δ_4, Δ_5, то план $\widetilde{X}_0$ неоптимален, и мы должны перейти к новому базисному плану. Среди отрицательных оценок находим наименьшую. Она соответствует столбцу A_4. Этот столбец назовем разрешающим и вектор A_4 введём в новый базис, а далее найдём вектор, который необходимо вывести из базиса.

Для этого вычислим симплексные отношения θ_i. Элементы столбца b делим на соответствующие положительные элементы столбца A_4 и среди полученных θ_i находим наименьшее $\theta_2 = 450$. Вектор A_7, соответствующий θ_2, выводим из базиса. Строка, соответствующая вектору A_7, называется разрешающей строкой. Элемент, который стоит на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называется разрешающим элементом. Разрешающая строка и столбец выделяются толстыми линиями. Напротив их ставятся стрелки, которые показывают, какой вектор надо ввести в базис, а какой вывести.

Построим новую симплекс-таблицу. При построении новой симплекс-таблицы рекомендуются следующие правила: 1) элементы разрешающей строки, начиная со строки A_0, делятся на разрешающий элемент; 2) вместо элементов разрешающего столбца, кроме разрешающего элемента, пишутся нули, а на месте разрешающего элемента – единица; 3) все остальные элементы x_{ij}'', начиная со строки A_0, находятся по правилу "прямоугольника". В первоначальной таблице стро-

ят прямоугольник с вершинами в разрешающем элементе, на разрешающей строке и на разрешающем столбце, т. е. x_{ij}, x_{i4}, x_{2j}, x_{24}. Перемножаем элементы x_{2j}, x_{i4}, которые лежат на одной диагонали, результат делим на x_{24} и полученное число отнимем от x_{ij}.

$$\begin{array}{ccc} x_{ij} & & x_{i4} \\ & \boxed{} & \\ x_{2j} & & x_{24} \end{array}$$

$$x_{ij}'' = x_{ij} - \frac{x_{2j}x_{i4}}{x_{24}}.$$

В результате получим новую симплекс-таблицу. Элементы симплекс-таблицы вычислялись по представленным правилам. Например, элемент, который стоит на пересечении третьей строки и столбца A_0, вычисляется следующим образом: $1850 = 2000 - \frac{900\cdot 1/3}{2}$.

Таблица 14

i	Базис	$C_Б$	b	$-0{,}4$ / A_1	$-1{,}1$ / A_2	$-1{,}4$ / A_3	0 / A_4	$-0{,}3$ / A_5	$-0{,}6$ / A_6	$-M$ / A_7
1	A_1	$-0{,}4$	400	1	1/2	1/2	0	0	0	0
2	A_4	0	450	0	1/2	0	1	1/2	0	1/2
3	A_6	$-0{,}6$	1850	0	$-1/6$	1/3	0	1/2	1	$-1/6$
4	$\Delta_j = z_j - c_j$		-1270	0	1	1	0	0	0	0,1
5	M		0	0	0	0	0	0	0	+1

Таким же образом вычисляем значения индексной строки. Для проверки вычисления значения индексной строки вычисляем по формулам (3.20) – (3.21) и видим, что они совпадают. Так как все оценки $\Delta_j \geq 0$, то $X_1 = (400, 0, 0, 450, 0, 1850, 0)$ будет искомым оптимальным планом.

Вывод: По первому варианту нужно распилить 400 брёвен, по четвёртому – 450 брёвен, по шестому – 1850 брёвен. При этом отходы будут минимальными и равными

$z_{min} = 0{,}4\cdot 400 + 0\cdot 450 + 0{,}6\cdot 1850 = 1270$ м.

3.4. Транспортная задача. Метод потенциалов

Симплекс-метод – наиболее универсальный метод решения задач линейного программирования. Однако, как правило, решение задач симплекс-методом сопряжено со значительными трудностями расчета. Существуют специальные классы задач линейного программирования, для которых симплекс-метод может быть значительно упрощен.

Одной из таких задач является транспортная задача, которая получила в настоящее время широкое распространение в теоретических разработках и практическом применении на транспорте и в промышленности.

Постановка задачи. Имеется m пунктов отправления $A_1, A_2, ..., A_m$ в которых сосредоточено или производится $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц однородного товара. Необходимо доставить в каждый из n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$ товар в количествах $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц. Известны также стоимости c_{ij} перевозок единицы товара из i-го пункта отправления j-ый пункт назначения. Например, c_{12} указывает стоимость перевозки единицы товара из первого пункта отправления во второй пункт назначения.

Необходимо составить план перевозок, имеющий минимальную стоимость и позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворив потребности.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-тому потребителю. Тогда условие задачи можно записать в виде табл. 15, которая обычно называется матрицей планирования.

Стоимость всех перевозок выразится линейной формой

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \tag{3.33}$$

все грузы должны быть вывезены (эти уравнения получаются при суммировании элементов матрицы планирования по строкам),

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{3.34}$$

потребности должны быть удовлетворены (уравнения получаются при суммировании по столбцам),

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.35}$$

Таблица 15

A_i \ B_j	B_1	B_2	…	B_n	Запасы
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Таким образом, задача сводится к минимизации линейной функции (3.33) при ограничениях (3.34), (3.35).

Известно, что задача всегда имеет решение, если выполняется условие баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{3.36}$$

Такая транспортная задача называется закрытой, в отличие от открытой, когда вместо некоторых уравнений в системе ограничений присутствуют неравенства.

Обычно стоимость перевозок c_{ij} записывают в виде матрицы тарифов

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

а объёмы перевозок x_{ij} – в виде матрицы перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Решение транспортной задачи состоит из трех основных этапов: 1) построение первоначального опорного плана перевозок; 2) проверки плана на оптимальность; 3) указание процедуры перехода до нового плана в случае неоптимальности.

1 этап. Построение первоначального опорного плана.

Метод «северо-западного угла». Он состоит в следующем: прежде всего заполняют клетки первой горизонтальной строки матрицы планирования по порядку слева направо, пока не будут исчерпаны все запасы, затем последовательно заполняют клетки второй строки, начиная с клетки, расположенной в том же столбце, в котором находится последняя заполненная клетка первой горизонтальной строки (принимают, что в указанной клетке первой горизонтальной строки оказалось число, меньше соответствующего b_1), до полного исчерпания запасов a_1 и т. д.

Клетки, в которых стоят отличные от нуля x_{ij}, называются загруженными, остальные – свободными. Обычно по правилу "северо-западного угла" получают план, содержащий $m+n-1$ загруженную клетку. Такой план называется невырожденным. Заполненные клетки соответствуют базисным переменным. Опорность плана состоит в его ацикличности, т. е. в матрице планирования нельзя построить цикл, все вершины которого расположены в занятых клетках.

Циклом называется набор клеток матрицы планирования, в котором две соседние клетки расположены в одном столбце или в одной строке, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая.

Метод минимальной стоимости. Заполнение матрицы планирования начинаем с клетки, имеющей минимальную стоимость и продолжаем в порядке неубывания стоимости.

Отметим, что при заполнении клетки исключается либо строка, соответствующая поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо строка и столбец одновременно. Процесс заполнения таблицы продолжаем до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Если опорный план вырожденный, то дополним количество занятых клеток до $m+n-1$, вводя нулевые фиктивные перевозки. Такие клетки будем считать занятыми.

2 этап. Проверка на оптимальность.

Транспортную задачу будем решать модификацией симплекс-метода – методом потенциалов. Пусть построен первоначальный невырожденный опорный план. Каждому поставщику (каждой строке) поставим в соответствие некоторое число U_i, $i=\overline{1,m}$, называемое потенциалом поставщика A_i, а каждому потребителю (каждому столбцу) – некоторое число V_j, $j=\overline{1,n}$, называемое потенциалом потребителя.

Числа U_i и V_j выбираем так, чтобы в любой занятой клетке

$$U_i + V_j = c_{ij}, \qquad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Невырожденный опорный план содержит $m+n-1$, заполненную клетку, поэтому для него можно составить систему $m+n-1$ независимых уравнений с $m+n$ неизвестными. Уравнений на одно меньше, чем неизвестных, поэтому одному из неизвестных нужно придать произвольное значение (лучше всего положить его равным нулю), тогда $m+n-1$ неизвестных потенциалов определяется однозначно.

Для каждой свободной клетки вычисляем "косвенные" тарифы U_i+V_j и сравниваем со стоимостью c_{ij}. Если для всех свободных клеток

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (U_i + V_j) \ge 0, \tag{3.39}$$

то план оптимальный.

Если хотя бы для одной клетки $\Delta_{ij} < 0$, то план не оптимальный и переходим к новому опорному плану.

3 этап. Построение нового плана.

Клетки для которых $\Delta_{ij} < 0$, называются перспективными. Среди перспективных клеток выбираем ту, для которой Δ_{ij} наименьшее. Если таких клеток несколько, то среди них выбираем любую.

Для выбранной перспективной клетки строим цикл, это значит составляем контур, по которому перераспределяем груз. Контур представляет собой замкнутую линию, которая состоит из горизонтальных и вертикальных отрезков, которые соединяют середины клеток, с которых одна перспективная, а остальные загруженные. Для каждой свободной клетки такой цикл существует, и он единственный. Точка, в которой изменяется направление контура (с горизонтального на вертикальный и наоборот), называется вершиной цикла.

В одной строке (столбце) могут находиться две, и только две вершины цикла. Точки самопересечения контура вершинами цикла не являются.

Свободной клетке приписываем знак (+), а остальным вершинам из заполненных клеток поочерёдно (−) и (+). В клетках, соответствующих отрицательным вершинам, отыскивается наименьший груз, который «перемещается» по клеткам цикла, т. е. прибавляется к поставкам x_{ij} в клетках со знаком плюс (включая свободную) и вычитается в клетках со знаком минус.

В результате перераспределения получаем новый опорный план, который подлежит проверке на оптимальность. Вновь строим систему потенциалов, проверяем условие оптимальности (3.39) и продолжаем процесс, пока не получится оптимальный план перевозок.

Пример.

Четыре леспромхоза заготавливают пиловочник в объёмах: 1 леспромхоз – $a_1 = 300$ тыс. м^3; 2 – $a_2 = 400$ тыс. м^3; 3 – $a_3 = 300$ тыс. м^3; 4 – $a_4 = 400$ тыс. м^3, всего $\sum_{i=1}^{4} a_i = 1400$ тыс. м^3. Этот пиловочник используют четыре лесопильных завода в объёмах: 1 завод – $b_1 = 200$ тыс. м^3; 2 – $b_2 = 350$ тыс. м^3; 3 – $b_3 = 400$ тыс. м^3; 4 – $b_4 = 450$ тыс. м^3; всего $\sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$ тыс. м^3. Матрица стоимости перевозок имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок, чтобы все пиломатериалы были вывезены, все потребности были удовлетворены и чтобы транспортные затраты были минимальными.

Решение. Все исходные данные запишем в виде табл. 16 транспортной задачи.

Таблица 16

Леспромхозы A_i	Лесопильные заводы				Запасы a_i	Потенциалы U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2	3	− 5 0	+ 2 300	300	$U_1 = 0$
A_2	4	2	1 400	3	400	$U_2 = -4$
A_3	3	4 150	3 +	5 150 −	300	$U_3 = 3$
A_4	1 200	2 200	2	4	400	$U_4 = 1$
Потребности b_j	200	350	400	450	1400	
Потенциалы V_j	$V_1 = 0$	$V_2 = 1$	$V_3 = 5$	$V_4 = 2$		

В правом верхнем углу клетки (i, j) даётся цена перевозки единицы груза C_{ij}, которую назовем стоимостью клетки. Первоначальный план строим методом "минимальной стоимости". В матрице транспортной задачи выбираем наименьший элемент. Он равен единице. Ему соответствуют клетки (4, 1) и (2, 3). Выбираем любую, например (4,1), и записываем в ней число min (200, 400)=200; исключаем из рассмотрения первый столбец. В клетку (2,3) записываем min (400, 400) = 400 и исключаем из рассмотрения второй столбец и вторую строку. Минимальная цена для незаполненных клеток будет равна 2. Таких клеток будет две: (1, 4) и (4, 2). Записываем в клетку (1, 4) min (300, 450) =300, а в клетку (4, 2) – min (300, 200) = 200. Остались незаполненными два столбца: второй и четвёртый. Записываем оставшиеся нераспределённые объёмы в клетку (3, 2) – 150 тыс. м^3 и в клетку (3, 4) – 150 тыс. м^3.

Так как количество загруженных клеток $6 < 4 + 4 - 1 = 7$, то план вырожденный. Дополним его до невырожденного фиктивной клеткой (1, 3). Эта клетка не составляет с другими занятыми клетками цикл. Таким образом, мы получили начальный невырожденный план.

Теперь найдём потенциалы. По загруженным клеткам записываем систему уравнений:

$U_1+V_3=5;\quad U_1+V_4=2;\quad U_2+V_3=1;\quad U_3+V_1=4;\quad U_3+V_4=5;$

$U_4+V_1=1,\quad U_4+V_2=2.$

Решая эту систему при условии $U_1=0$, находим потенциалы U_i, V_j и записываем их в соответствующие столбец и строку табл. 16.

Проверим на оптимальность.

$\Delta_{11}=C_{12}-(U_1+V_1)=2-(0+0)=2>0;$

$\Delta_{12}=C_{12}-(U_1+V_2)=3-(0+1)=2>0;$

$\Delta_{21}=C_{21}-(U_2+V_1)=4-(-4+0)=8>0;$

$\Delta_{22}=C_{22}-(U_2+V_2)=2-(-4+1)=5>0;$

$\Delta_{24}=C_{24}-(U_2+V_4)=3-(-4+2)+2=5>0;$

$\Delta_{31}=C_{31}-(U_3+V_1)=3-(3+0)=0\geq 0;$

$\Delta_{33}=C_{33}-(U_3+V_3)=3-(3+5)=-5<0;$

$\Delta_{43}=C_{43}-(U_4+V_3)=3-(1+5)=-3<0;$

$\Delta_{44}=C_{44}-(U_4+V_4)=4-(1+2)=1>0.$

План не является оптимальным, потому что $\Delta_{33}<0$ и $\Delta_{43}<0$. $\min(\Delta_{33};\Delta_{34})=\min(-5;-3)=-5$ достигается в клетке (3, 3). Для клетки (3, 3) строим цикл с вершинами в клетках (3,3), (1,3), (1,4), (3,4). Расставим знаки "+" в клетках (3, 3) и (1, 4) и "–" в клетках (1, 3), и (3, 4).

Найдём минимальную перевозку Θ среди клеток с отрицательными знакам $\Theta=\min(x_{13},x_{34})=\min(0,150)=0$. Значение Θ запишем в перспективную клетку (3, 3), прибавим к перевозкам в клетку (1, 4) и отнимем от перевозок клеток (1, 3) и (3, 4). Таким образом, мы получили новую таблицу планирования (табл. 17).

Отметим, что поскольку в цикл с отрицательными вершинами вошла клетка с фиктивными перевозками, то новая матрица планирования практически не изменилась, за исключением того, что клеткой с фиктивными перевозками стала клетка (3, 3) вместо клетки (1, 3).

Новый план проверяем на оптимальность. Находим потенциалы из системы уравнений:

$U_1+V_4=2;\quad U_2+V_3=1;\quad U_3+V_2=4;\quad U_3+V_3=3;\quad U_3+V_4=5;$

$U_4+V_1=1;\quad U_4+V_2=2;\quad U_1=0.$

и записываем в табл. 17.

Таблица 17

Леспромхозы A_i	Лесопильные заводы				Запасы a_i	Потенциалы U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2	3	5	2 300	300	$U_1=0$
A_2	4	2	1 400	3	400	$U_2=1$
A_3	3	4 150	3 0	5 150	300	$U_3=3$
A_4	1 200	2 200	2	4	400	$U_4=1$
Потребности b_j	200	350	400	450	1400	
Потенциалы V_j	$V_1=0$	$V_2=1$	$V_3=0$	$V_4=2$		

Вычисляем Δ_{ij} для незагруженных клеток:

$\Delta_{12}=3-(1+0)=2>0;\qquad \Delta_{31}=3-(3+0)=0\geq 0;$

$\Delta_{13}=5-(0+0)=5>0;\qquad \Delta_{43}=3-(1+0)=2>0;$

$\Delta_{21}=4-(1+0)=3>0;\qquad \Delta_{44}=4-(1+2)=1>0;$

$\Delta_{24}=3-(1+2)=0\geq 0.$

Поскольку все $\Delta_{ij}\geq 0$, то план оптимален.

Матрица оптимальных перевозок имеет вид

$$X_{опт}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 150 \\ 200 & 200 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспортные затраты составляют

Z = 200·1 + 150·4 +200·2 + +400·1 +300·2+150·5 = 2950 ден. ед.

4. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

4.1. Основные понятия

При рассмотрении задач линейного программирования изучаются так называемые детерминированные модели, которые описывают процессы, определяемые заранее известными факторами. Модели, содержащие случайные величины, называются стохастическими. В стохастических задачах исследования операций часто затруднительно даже построение математической модели, не говоря уже об оптимизациях. Однако в некоторых частных случаях такую математическую модель удается построить. Это возможно, когда операция представляет собой (точно или приближенно) так называемый марковский процесс.

Первоначально рассмотрим понятие случайного процесса. Пусть имеется некоторая физическая система, которая с течением времени меняет свое состояние (переходит из одного состояния в другое), причём заранее неизвестным случайным образом. Тогда говорят, что в системе происходит случайный процесс. Под физической системой можно понимать что угодно: техническое устройство, группу таких устройств, предприятие, отрасль промышленности и т. д.

В качестве примера рассмотрим работу раскряжёвочной установки. Для процесса раскряжёвки характерны следующие состояния:

S_0 – установка осуществляет раскряжёвку хлыстов;

S_1 – установка исправна и свободна (простаивает из-за отсутствия хлыстов);

S_2 – установка неисправна.

Случайный процесс, протекающий в системе, называется <u>марковским,</u> если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, как система пришла в это состояние.

Иначе говоря, для марковского процесса "будущее" зависит только от "настоящего" и не зависит от "прошлого". На практике встречаются процессы, которые, если не в точности марковские, то могут быть в каком-то приближении рассмотрены как марковские. В сущности, любой процесс можно рассматривать как марковский, если все параметры из "прошлого", от которых зависит "будущее", включить в "настоящее".

Важное место среди случайных процессов занимают марковские случайные процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем. Процесс называется процессом с дискретным состоянием, если его возможные состояния $S_1, S_2, \ldots, S_n$, можно перечислить (пронумеровать), и переход системы из состояния в состояние происходит "скачком", т. е. практически мгновенно.

Процесс называется процессом с непрерывным временем, если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны, т.е. переход может осуществиться в принципе в любой момент. Так, в примере с раскряжёвочной установкой процесс является дискретным (три состояния S_0, S_1, S_2) с непрерывным временем. Мы не можем заранее точно указать момент, когда установка испортится или привезут хлысты.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой – так называемым <u>графом состояний.</u> Возможные состояния обозначаются квадратиками, а возможные переходы – стрелками. Так, в примере граф состояний будет иметь вид:

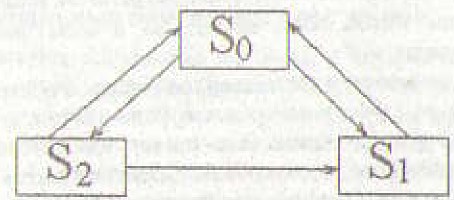

Рис. 18. Граф состояния распиловочной машины

Раскряжёвочная установка из состояния S_0 может перейти в состояние S_1 или S_2 или наоборот, из состояний S_1 и S_2 она может перейти в состояние S_0. В то же время мы видим, что из состояния S_2 (установка неисправна) она может перейти в состояние S_1 (установка исправна, но не работает), а из состояния S_1 перейти в состояние S_2 она не может.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.

Например: поток вызовов на АТС, поток прибывающих на нижний склад машин с хлыстами и т. д. Поток событий можно наглядно изобразить рядом точек на оси времени Ot (рис. 19)

Рис. 19. Схема простейшего потока событий

Говоря о потоке событий, нужно иметь в виду, что здесь термин "событие" имеет значение, несколько отличное от ранее рассматриваемого в теории вероятностей. Там событие – это исход опыта, обладающий той или иной вероятностью. Здесь же, события, образующие поток, сами вероятностью не обладают (вероятностью обладают производные от них события). Например, за время t на нижний склад прибудут 4 машины с хлыстами.

Важной характеристикой потока является его интенсивность. λ – среднее число событий, приходящихся на единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной, так и переменной, зависящей от времени: $\lambda = \lambda(t)$. Например, поток машин, движущихся по улице днем, интенсивнее чем ночью, в часы "пик" интенсивнее, чем в другие часы.

Поток называется стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность λ стационарного потока должна быть постоянной. Это, однако, не означает, что фактическое число событий, появляющихся в единицу времени, постоянно, поток неизбежно имеет какие-то точки "сгущения" и "разряжения".

Поток событий называется потоком без последействия, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попадает на другой (рис. 20).

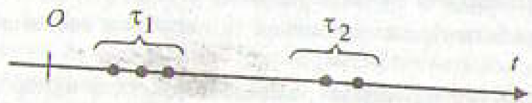

Рис. 20. Схема потока событий без последействия

Поток событий называется ординарным, если события в нем появляются поодиночке, а не группами. Например, поток поездов – ординарен, поток прибывающих вагонов в поезде – не ординарен.

Поток событий называется простейшим (или стационарным пуассоновским), если он обладает тремя свойствами: стационарен, ординарен и без последействия. Для простейшего потока интенсивностью λ интервал T между соседними событиями имеет показательное распределение с плотностью $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$. Известно, что $M_T = \sigma_T = 1/\lambda$.

В расчетах, связанных с потоками событий, удобно пользоваться понятием "элемента вероятности". Рассмотрим на оси Ot простейший поток с интенсивностью λ и произвольно расположенный элементарный участок времени Δt. Элементом вероятности называется вероятность попадания на этот участок хотя бы одного события потока. Для простейшего потока элемент вероятности с точностью до малых более высокого порядка малости по сравнению с Δt равен $P_{\Delta t} = \lambda \Delta t$.

4.2. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Финальные вероятности состояний

Рассматриваются марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Будем считать, что все переходы системы S из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий (поток вызовов, поток отказов, восстановлений и т.д.). Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, простейшие, то процесс, протекающий в системе, будет марковским. Если система S находится в каком-то состоянии S_i, из которого есть непосредственный переход в другое состояние S_j (стрелка на графе состояний направлена из S_i в S_j), то мы будем представлять себе, что на систему, пока она находится в состояние S_i, действует простейший поток событий, переводящий ее в состояние S_j. Как только появится первое событие этого потока, система скачком переходит из состояния S_i в состояние S_j.

Для наглядности удобно на графе состояний у каждой стрелки проставлять интенсивность того потока событий, который переводит систему по данной стрелке. Такой граф состояний называется размеченным графом. Обычно интенсивность потока, переводящего систему из состояния S_i в состояние S_j, обозначается λ_{ij}. Так, размеченный граф для работы раскряжёвочной машины имеет вид (рис. 21):

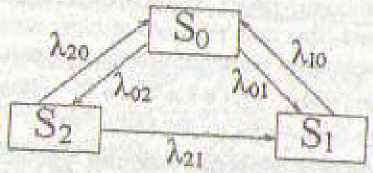

Рис. 21. Размеченный граф состояния распиловочной машины

Здесь λ_{02} - интенсивность потока отказов установки; $\lambda_{21} = \lambda_{20}$ - интенсивность потока восстановлений установки; λ_{01} - интенсивность потока расходования хлыстов; λ_{10} - интенсивность потока поступления хлыстов.

Имея размеченный граф, легко построить математическую модель данного процесса.

Пусть имеется система S с n возможными состояниями $S_1, S_2, \cdots, S_n$. Вероятностью $i-$ го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента сумма всех вероятностей состояний равна единице: $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$. Имея размеченный граф состояний, можно найти все вероятности $p_i(t)$ как функции времени. Для этого составляются уравнения Колмогорова, в которых неизвестными являются вероятности состояний.

<u>Правило.</u> Чтобы записать уравнение Колмогорова для $i-$ го состояния, нужно в левой части уравнения записать производную $\frac{dp_i(t)}{dt}$. В правой части уравнения записывается сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивность соответствующих потоков минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного $i-$ го состояния.

Таким, образом, каждому из состояний $S_1, S_2, \cdots, S_n$ соответствует линейное дифференциальное уравнение, а для всех состояний получаем систему из n линейных дифференциальных уравнений с n неизвестными (одно из них, любое, можно отбросить, пользуясь тем, что $p_1(t) + p_2(t) + \cdots + p_n(t) = 1$.

Чтобы решить систему уравнений Колмогорова, нужно задать начальные условия. Так, если мы точно знаем, что в начальный момент $t = 0$ система находилась в состоянии S_i, то начальные условия имеют вид: $p_i(0) = 1$; $p_j(0) = 0,\ j \neq i$.

<u>Пример.</u> Техническое устройство может находиться в одном из трех состояний S_0, S_1, S_2. Интенсивность потоков, которые переводят устройства из одного состояния во второе, известны: $\lambda_{01} = 2$, $\lambda_{10} = 4$, $\lambda_{21} = 2$, $\lambda_{12} = 3$, $\lambda_{20} = 4$.

Необходимо построить размеченный граф состояний, записать систему уравнений Колмогорова, найти финальные вероятности и сделать анализ полученных решений.

Размеченный граф состояний имеет вид (рис. 22).

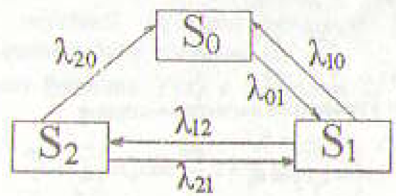

Рис. 22. Размеченный граф состояний

По графу запишем систему уравнений Колмогорова в общем виде:

$$
\begin{cases}
\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_{01} p_0(t) + \lambda_{10} p_1(t) + \lambda_{20} p_2(t), \\
\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{01} p_0(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{12}) p_1(t) + \lambda_{21} p_2(t), \\
\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12} p_1(t) - (\lambda_{20} + \lambda_{21}) p_2(t), \\
p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1.
\end{cases}
$$

Вместо интенсивности потоков λ_{ij} запишем их конкретные значения и получим искомую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -2p_0(t) + 4p_1(t) + 4p_2(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = 2p_0(t) - 7p_1(t) + 2p_2(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = 3p_1(t) - 6p_2(t), \\ p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1. \end{cases}$$

Чтобы найти финальные вероятности состояний, в уравнениях Колмогорова отбросим первое уравнение, а по остальным составим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2p_0 - 7p_1 + 2p_2 = 0, \\ 3p_1 - 6p_2 = 0, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Делим первое уравнение на 2, а второе на 3 " получим систему

$$\begin{cases} p_0 - 3{,}5p_1 + p_2 = 0, \\ p_1 - 2p_2 = 0, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Из третьего уравнения вычитаем первое

$$\begin{cases} p_0 - 3{,}5p_1 + p_2 = 0, \\ p_1 - 2p_2 = 0, \\ 4{,}5p_1 = 1. \end{cases}$$

Отсюда получим $p_1 = 0,22$, $p_2 = 0,11$ и $p_0 = 0,67$.

Вывод. При достаточно большом времени работы техническое устройство с вероятностью $p_0 = 0,67$ будет находиться в состоянии S_0, с вероятностью $p_1 = 0,22$ в состоянии S_1 и с вероятностью $p_2 = 0,11$ в состоянии S_2.

5. РЯДЫ ФУРЬЕ

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-непрерывна и ограничена на промежутке $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{5.1}$$

построенный для этой функции, сходится во всех точках непрерывности. Сумма ряда $s(x)$ является периодической функцией с периодом 2π, равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности, а в точках разрыва равна среднему арифметическому пределов слева и справа функции $f(x)$

$$s(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Коэффициенты ряда вычисляются по формулам Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \tag{5.2}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$.

Ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы $(a_0 = 0, a_n = 0)$, а четной только косинусы $(b_n = 0)$.

Ряд Фурье для функции $f(x)$ с периодом $2l$ на промежутке $[-l, l]$ будет

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{5.3}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx;\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx. \tag{5.4}$$

Если функция $f(x)$ задана на промежутке $[0, l]$, то ее разложение в ряд Фурье на промежутке $[-l, 0]$ дополняют нечетным или четным образом, разлагая по синусам или по косинусам.

Для нечетной функции

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx.$$

Для четной функции

$$b_n = 0,\ a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 2x - 3$ на промежутке $(-\pi, \pi)$.

Решение. По формулам (5.2) вычисляем коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)dx = \frac{1}{\pi}(x^2-3x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left((\pi^2-3\pi)-(\pi^2+3\pi)\right) = 6$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)\cos nx dx = \begin{vmatrix} u = 2x-3 & du = 2dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((2x-3)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left((2\pi-3)\sin n\pi + (-2\pi-3)\sin n\pi + \frac{2}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(0+0+\frac{2}{n}(\cos n\pi - \cos n\pi)\right) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)\sin nx dx = \begin{vmatrix} u = 2x-3 & du = 2dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-(2x-3)\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-(2\pi-3)\cos n\pi + (-2\pi-3)\cos n\pi + \frac{2}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-4\pi\cos n\pi + \frac{2}{n}(\sin n\pi + \sin n\pi)\right) = \frac{1}{\pi n}\left((-1)^{n+1}4\pi + 0\right) = \frac{4}{n}(-1)^{n+1}.$$

Искомое разложение в соответствии с формулой (5.1) имеет вид

$$2x - 3 = -3 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ МЕТОДОМ ДАЛАМБЕРА

Свободные колебания $u = u(x,t)$ бесконечной однородной струны описываются уравнением в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.1}$$

которое называется волновым уравнением.

Для определения движения струны необходимо задать начальные условия: ее форму в начальный момент времени

$$u\big|_{t=0} = f(x), \tag{6.2}$$

и начальную скорость точек

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x). \tag{6.3}$$

Решение уравнения (6.1) с начальными условиями (6.1)-(6.2) может быть найдено методом Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz. \tag{6.4}$$

Пример 1. Найти уравнение $u = u(x,t)$ формы однородной бесконечной струны, определенной уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u\big|_{t=0} = \frac{\sin x}{x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{x}{1+x^2}$.

Решение. Решение данной задачи, описывающее форму однородной бесконечной струны, находим методом Даламбера по формуле (6.4). Здесь $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $F(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Отсюда

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x-at)}{x-at} + \frac{\sin(x+at)}{x+at}\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\frac{z}{1+z^2}dz =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(x+at)(\sin x\cos at-\cos x\sin at)+(x+at)(\sin x\cos at-\cos x\sin at)}{(x-at)(x+at)}+$$

$$+\frac{1}{4}\ln(1+z^2)\ln(1+z^2)\Big|_{x-at}^{x+at}=$$

$$=\frac{x\sin x\cos at-at\cos x\sin at}{x^2-a^2t^2}+\frac{1}{4a}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}.$$

Пример 2. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u\big|_{t=0}=x$ и $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin x$.

Решение. Искомое решение найдем из формулы (6.4) при $f(x)=x$ и $F(x)=\sin x$. При этом получаем

$$u(x,t)=\frac{x-at+x+at}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin z\,dz=x-\frac{1}{2a}\cos z\Big|_{x-at}^{x+at}=$$

$$=x-\frac{\cos(x+at)-\cos(x-at)}{2a}=$$

$$=x-\frac{\cos x\cos at-\sin x\sin at-\cos x\cos at-\sin x\sin at}{2a}=$$

$$=x+\frac{\sin x\sin at}{a}.$$

7. ПРОГРАММА

курса «Высшая математика. Математические методы и модели в расчетах на ЭВМ» для студентов-заочников инженерно-технических и экономических специальностей

7.1. Обработка результатов наблюдений

1. Математическая обработка результатов наблюдений. Метод наименьших квадратов.

2. Определение параметров линейной зависимости.

3. Метод выравнивания. Определение параметров выбранной зависимости.

7.2. Элементы математической статистики

1. Основные задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Статистический и вариационный ряды. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.

2. Точечные оценки параметров распределения и их свойства. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии. Интервальные оценки параметров. Доверительная вероятность, доверительный интервал. Доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины.

3. Понятие о критериях согласия. Критерий «хи-квадрат» χ^2 (Пирсона).

4. Понятие о корреляционной зависимости. Коэффициент корреляции и его свойства. Уравнение линейной регрессии.

7.3. Линейное программирование

1. Модели, приводящие к задачам линейного программирования. Постановка задачи математического программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования. Геометрический метод решения.

2. Основные понятия: план, базисный план, оптимальный план. Критерий оптимальности плана. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования. M – задача.

4. Задача раскроя материалов, ее математическая модель и решение.

5. Постановка транспортной задачи. Открытая и замкнутая модель. Построение первоначального базисного плана: метод северо-

западного угла, метод минимальной стоимости. Метод потенциалов решения транспортной задачи.

7.4. Теория массового обслуживания

1. Понятие «физической системы». Случайные процессы. Случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Граф состояний.

2. Марковские процессы. Потоки событий. Интенсивность потока. Стационарные и ординарные потоки. Потоки с последействием и без последействий. Пуассоновский поток.

3. Понятие «элемента вероятности». Размеченный граф состояний. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Финальные вероятности состояний.

7.5. Ряды Фурье

Системы ортогональных тригонометрических функций и тригонометрический ряд Фурье. Свойства рядов Фурье. Ряды Фурье для периодических и непериодических функций.

7.6. Решение уравнения колебания струны методом Даламбера

Основные типы уравнений математической физики. Уравнение колебания струны. Краевые условия. Решение волнового уравнения методом Даламбера.

8. ЗАДАНИЯ

Задачи 1–10. Методом наименьших квадратов определить параметры эмпирической зависимости $y = ax + b$. Дать графическую иллюстрацию.

1.	x	2,1	2,7	3,3	3,8	4,2	4,9	5,6	6,1	6,8
	y	1,2	1,6	2,1	2,4	2,5	2,8	3,4	3,8	4,0

2.	x	0	0,6	1,3	1,8	2,7	3,1	3,9	4,2	5,1
	y	10,2	8,2	6,0	5,1	1,5	0,8	−1,6	−2,8	−5,5

3.	x	−4,2	−3,7	−3,3	−2,6	−1,8	−1,1	−0,8	−0,4	0
	y	0,1	0,5	1,1	1,8	2,9	3,6	4,0	4,7	4,9

4.	x	−10,0	−8,5	−6,5	−5,0	−2,0	2,0	4,6	7,0	9,5
	y	0,8	0,5	0,3	0	−0,5	−1,7	−1,8	−2,5	−2,8

5.	x	−4,0	−3,5	−2,4	−2,0	−0,8	0,5	1,4	2,5	3,8
	y	−1,6	−1,0	−0,8	−1,1	−0,7	−0,4	−0,2	0	0,3

6.	x	−6,0	−4,9	−3,8	−2,0	−0,6	0,6	2,1	3,8	5,5
	y	−0,5	0	0,1	0,7	1,0	1,3	1,4	2,0	2,5

7.	x	−5,0	−4,0	−3,1	−2,2	−1,0	0,4	1,0	2,2	3,1
	y	8,9	7,8	6,8	5,0	3,9	1,5	0	−1,4	−2,1

8.	x	−3,0	−2,0	1,5	−1,0	0,8	0,9	2,0	2,5	3,2
	y	−2,1	−1,3	−1,0	0,5	0,7	1,5	1,6	2,3	2,7

9.	x	−5,3	−3,7	−2,3	0,8	2,1	3,6	5,9	7,8	9,2
	y	2,6	2,4	1,7	1,3	1,0	0,7	0,1	−0,5	−0,6

10.	x	0,2	0,9	1,6	1,7	2,4	2,5	3,1	3,4	4,1
	y	3,7	1,2	−0,3	−1,5	−3,0	−4,0	−5,2	−6,4	−8,6

Задачи 11–20. Методом выравнивания найти эмпирическую функцию $y = f(x)$ по полученным экспериментальным значениям.

11.	x	7	12	17	22	27	32	37	42	47
	y	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3	32,6	28,9

12.	x	0,435	0,575	0,688	0,77	0,81	0,855	0,928	1,16
	y	0,246	0,429	0,586	0,883	1,05	1,13	1,29	2,23

13.	x	220	200	180	160	140	120	100	90	10
	y	11,5	8,7	6,4	4,89	3,88	3,02	2,3	1,76	0,5

14.	x	3,334	1,63	0,866	0,432	0,265	0,17	0,115
	y	0,482	0,95	1,9	4,274	7,164	11,48	17,6

15.	x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
	y	38,0	33,8	30,6	28,0	25,8	24,1

16.	x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	y	0,46	0,35	0,31	0,25	0,22	0,21	0,18	0,17

17.	x	100	75	35	20	1
	y	133	125	119	112	68

18.	x	30	40	63	80	100	125	160	200	250
	y	55,7	46,4	32,1	23,0	16,2	10,8	5,1	2,3	1,2

19.	x	3	6	9	12	15	18	21	24
	y	57,6	41,9	31,0	22,7	16,6	12,2	8,9	6,5

20.	x	30	25	20	15	10	5
	y	0,52	1,95	2,67	3,70	6,77	16,64

Задачи 21–30.

1. Построить гистограмму относительных частот.
2. Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.
3. Найти числовые характеристики выборки: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение.
4. Найти точечные оценки параметров нормального распределения (предполагается, что исследуемая величина имеет нормальное распределение), записать плотность вероятности и функцию распределения.
5. Проверить согласие эмпирической функции распределения с модельной нормальной функцией распределения при помощи критерия χ^2(Пирсона) (уровень значимости $\alpha = 0{,}05$).
6. Найти доверительный интервал для математического ожидания (доверительную вероятность принять равной 0,95).

21.	x	21–25	25–29	29–33	33–37	37–41
	y	7	19	42	24	8

22.	x	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
	y	8	24	36	22	10

23.	x	0–6	6–12	12–18	18–24	24–30	30–36
	y	4	16	28	32	15	5

24.	x	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
	y	9	20	45	19	7

25.	x	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6
	y	6	23	38	25	8

26.	x	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
	y	7	25	37	23	8

27.	x	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6
	y	6	23	38	25	8

28.	x	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55
	y	7	19	45	20	9

29.	x	10–11	11–12	12–13	13–14	14–15
	y	7	20	44	21	8

30.	x	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
	y	9	24	35	22	10

Задачи 31–40.

Даны результаты наблюдений над некоторой двумерной случайной величиной (η, ξ).

1. Построить корреляционное поле.
2. Определить средние выборочные значения $\bar{x}$, $\bar{y}$.
3. Определить несмещенную оценку для дисперсии S_x, S_y.
4. Определить коэффициент корреляции r_{xy}.
5. Найти эмпирическую функцию линейной регрессии η на ξ и ξ на η; изобразить эти прямые на корреляционном поле.
6. Проверить гипотезу $H_0: r = 0$ (принять уровень значимости $\alpha = 0{,}5$).

Задача 31.

y \ x	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10
5,5–8,5	–	–	–	2	4
8,5–11,5	–	–	3	4	6
11,5–14,5	–	1	8	3	2
14,5–17,5	–	2	9	6	–
17,5–20,5	–	3	5	7	2
20,5–23,5	8	4	1	–	–

Задача 32.

y \ x	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17
2,1–2,3	4	1	–	–	–
2,3–2,5	5	13	6	–	–
2,5–2,7	1	8	25	13	1
2,7–2,9	–	–	4	5	8
2,9–3,1	–	–	–	1	5

Задача 33.

y \ x	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
17,5–22,5	1	–	–	–	–
22,5–27,5	1	4	3	–	–
27,5–32,5	1	5	5	2	–
32,5–37,5	–	2	9	4	–
37,5–42,5	–	–	2	4	3
42,5–45,5	–	–	–	1	2

Задача 34.

y \ x	2,15–2,45	2,45–2,75	2,75–3,05	3,05–3,35	3,35–3,65	3,65–3,95
7,0–7,2	5	–	–	–	–	–
7,2–7,4	4	12	–	–	–	–
7,4–7,6	–	8	5	4	–	–
7,6–7,8	–	1	5	7	12	–
7,8–8,0	–	–	–	–	1	1

Задача 35.

y \ x	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75
9–15	1	3	1	–	–	–
15–21	1	6	2	1	–	–
21–27	–	2	6	8	4	–
27–33	–	–	1	3	4	2
33–39	–	–	–	–	2	4

Задача 36.

y \ x	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100	100 – 120	120 – 140
30 – 50	4	1	–	–	–	–
50 – 70	1	3	3	–	–	–
70 – 90	–	2	7	4	–	–
90 – 110	–	–	4	8	1	–
110 – 130	–	–	–	3	5	–
130 – 150	–	–	–	–	1	3

Задача 37.

y \ x	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55	55 – 65
42 – 44	1	5	2	–	–
44 – 46	1	9	4	–	–
46 – 48	–	4	40	8	–
48 – 50	–	–	1	12	2
50 – 52	–	–	1	3	7

Задача 38.

y \ x	50 – 80	8 – 110	110 – 140	140 – 170	170 – 200
5 – 15	5	–	–	–	–
15 – 25	4	12	–	–	–
25 – 35	–	8	15	4	–
35 – 45	–	1	5	7	2
45 – 55	–	–	–	–	2

Задача 39.

y \ x	7,25 – 7,75	7,75 – 8,25	8,25 – 8,75	8,75 – 9,25
5 – 15	6	–	–	–
15 – 25	4	2	–	–
25 – 35	–	12	–	–
35 – 45	–	6	4	1
45 – 55	–	–	6	9

Задача 40.

y \ x	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
2 – 6	2	–	2	–	–	–	–
6 – 10	–	1	4	–	–	–	–
10 – 14	–	4	13	10	–	–	–
14 – 18	–	2	–	22	11	6	–
18 – 22	–	–	–	–	15	4	2
22 – 26	–	–	–	–	1	1	–

Задачи 41–50. Решить графическим методом задачу линейного программирования.

41. $\begin{cases} 3x + y \le 30, \\ x + y \le 20, \\ 2x - y \le 6, \\ x + 3y \ge 15, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$
$f(x, y) = 4x + 3y \to \max.$

42. $\begin{cases} 2x + y \ge 8, \\ x + 2y \ge 10, \\ x + y \le 11, \\ 2x - 3y \le 6, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$
$f(x, y) = x + y \to \min.$

43. $\begin{cases} 17x + 5y \ge 85, \\ x + y \le 20, \\ 7x + 2y \le 105, \\ x + 2y \le 34, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$
$f(x, y) = 2x + y \to \max.$

44. $\begin{cases} 2x + y \ge 4, \\ 3x - 4y \ge -24, \\ x + y \le 13, \\ x - y \le 5, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$
$f(x, y) = 4x + 3y \to \max.$

45. $\begin{cases} 5x + 4y \le 100, \\ x - 2y \ge -22, \\ 5x + 2y \le 80, \\ 5x + 6y \ge 60, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$

$f(x, y) = 4x + 5y \to \max.$

46. $\begin{cases} x + 2y \ge 4, \\ x - y \ge 1, \\ 7x + 8y \le 56, \\ 4x - y \ge -4, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$

$f(x, y) = x + 6y \to \min.$

47. $\begin{cases} 2x + y \ge 4, \\ x - y \le -1, \\ 7x + 6y \le 42, \\ x \le 2, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$

$f(x, y) = 2x + 3y \to \min.$

48. $\begin{cases} 2x + y \le 18, \\ x - y \ge -3, \\ x + y \ge 4, \\ x - 3y \le 3, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$

$f(x, y) = x + 2y \to \max.$

49. $\begin{cases} 2x + y \le 20, \\ 2x - 3y \ge -12, \\ x + 2y \ge 8, \\ x - 2y \le 0, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$

$f(x, y) = 2x + 3y \to \max.$

50. $\begin{cases} 2x - 3y \ge -18, \\ 5x + 2y \le 50, \\ 5x - 3y \le 25, \\ 3x + y \ge 6, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$

$f(x, y) = 5x + y \to \max.$

Задачи 51–60. Четыре предприятия A_1, A_2, A_3, A_4 изготавливают продукцию в количествах a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно, которую используют предприятия B_1, B_2, B_3, B_4 в количествах b_1, b_2, b_3, b_4. Необходимо составить оптимальный план перевозок, если матрица стоимости имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Остальные данные приведены в таблице

Задача	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
51	180	240	400	360	300	400	200	280
52	150	190	230	280	180	170	210	290
53	300	400	280	360	500	200	300	340
54	440	560	600	420	700	660	280	380
55	400	360	440	500	380	420	480	420
56	90	120	180	140	100	140	100	190
57	270	330	240	360	300	400	280	220
58	320	430	600	380	580	420	400	330
59	400	200	300	280	240	360	180	400
60	290	210	170	180	230	280	150	190

Задачи 61–70.

На предприятии имеются бревна длиной L м, которые необходимо разрезать на заготовки длиной l_1, l_2, l_3 м в количестве p_1, p_2, p_3 соответственно.

Необходимо составить оптимальный план раскройки материала, который обеспечивает минимальные отходы, при условии выполнения плана по выходу заготовок. Исходные данные приведены в таблице.

Задача	Длина бревен L, м	Размеры заготовок, м			Количество заготовок, шт.		
		l_1	l_2	l_3	p_1	p_2	p_3
61	5,6	1,6	1,3	3,6	240	390	90
62	5,6	1,8	1,2	3,4	480	780	180
63	6,0	1,8	1,3	3,3	480	420	240
64	6,0	2,6	1,7	2,9	900	1200	840
65	6,2	2,4	1,3	2,9	300	450	270
66	6,2	2,3	1,8	2,8	600	780	420
67	6,5	1,9	2,1	2,3	180	240	150
68	6,5	2,1	2,3	1,4	600	720	900
69	6,6	3,0	1,8	2,4	300	420	270
70	6,6	2,3	1,8	2,1	600	720	570

Задачи 71–80. Техническое устройство может находиться в одном из трех состояний S_0, S_1, S_2. Интенсивность потоков, переводящих устройство из состояния в состояние, заданы в таблице

Задача	Интенсивности потоков					
	λ_{01}	λ_{02}	λ_{10}	λ_{12}	λ_{20}	λ_{21}
71	2	0	4	1	2	2
72	4	1	2	2	1	0
73	2	1	4	5	0	1
74	0	1	0	1	2	3
75	2	2	3	2	1	4
76	4	5	1	0	3	2
77	0	3	2	1	4	1
78	2	2	1	2	3	0
79	2	4	0	4	2	1
80	3	4	2	2	0	1

Задачи 81–90. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале.

81. $f(x)=x$ в интервале $(-2,2)$.
82. $f(x)=|x|$ в интервале $(-1,1)$.
83. $f(x)=1-x$ в интервале $(-\pi,\pi)$.
84. $f(x)=|x|-1$ в интервале $(-1,1)$.
85. $f(x)=x+1$ в интервале $(-\pi,\pi)$.
86. $f(x)=|x|+1$ в интервале $(-2,2)$.
87. $f(x)=2x-1$ в интервале $(-1,1)$.
88. $f(x)=x-2$ в интервале $(-\pi,\pi)$.
89. $f(x)=x-1$ в интервале $(-1,1)$.
90. $f(x)=1-|x|$ в интервале $(-\pi,\pi)$.

Задачи 91–100. Найти по формуле Даламбера уравнение $u=u(x;t)$ формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если в начальный момент времени $t=0$ форма струны и скорость ее точек определяются функциями $u|_{t=0}=f(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x)$.

91. $f(x)=\sin x$, $F(x)=\omega x$.
92. $f(x)=e^x$, $F(x)=x$.
93. $f(x)=\cos x$, $F(x)=v_0$.
94. $f(x)=e^{-x}$, $F(x)=\omega x$.
95. $f(x)=x$, $F(x)=e^{-x}$.
96. $f(x)=x^2$, $F(x)=v_0$.
97. $f(x)=1-x$, $F(x)=\sin x$.
98. $f(x)=\sin x$, $F(x)=x$.
99. $f(x)=x+1$, $F(x)=\cos x$.
100. $f(x)=\sin x$, $F(x)=v_0$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Функция Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	X	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,33	0,1293	0,66	0,2454	0,99	0,3389
0,01	0,0040	0,34	0,1331	0,67	0,2486	1,00	0,3413
0,02	0,0080	0,35	0,1368	0,68	0,2517	1,01	0,3438
0,03	0,0120	0,36	0,1406	0,69	0,2549	1,02	0,3461
0,04	0,0160	0,37	0,1443	0,70	0,2580	1,03	0,3485
0,05	0,0199	0,38	0,1480	0,71	0,2611	1,04	0,3508
0,06	0,0239	0,39	0,1517	0,72	0,2642	1,05	0,3531
0,07	0,0279	0,40	0,1554	0,73	0,2673	1,06	0,3554
0,08	0,0319	0,41	0,1591	0,74	0,2703	1,07	0,3577
0,09	0,0359	0,42	0,1628	0,75	0,2734	1,08	0,3599
0,10	0,0398	0,43	0,1664	0,76	0,2764	1,09	0,3621
0,11	0,0438	0,44	0,1700	0,77	0,2794	1,10	0,3643
0,12	0,0478	0,45	0,1736	0,78	0,2823	1,11	0,3665
0,13	0,0517	0,46	0,1772	0,79	0,2852	1,12	0,3686
0,14	0,0557	0,47	0,1808	0,80	0,2881	1,13	0,3708
0,15	0,0596	0,48	0,1884	0,81	0,2910	1,14	0,3729
0,16	0,0636	0,49	0,1879	0,82	0,2939	1,15	0,3479
0,17	0,0675	0,50	0,1915	0,83	0,2967	1,16	0,3770
0,18	0,0714	0,51	0,1950	0,84	0,2995	1,17	0,3790
0,19	0,0763	0,52	0,1985	0,85	0,3023	1,18	0,3810
0,20	0,0793	0,53	0,2919	0,86	0,3051	1,19	0,3830
0,21	0,0832	0,54	0,2054	0,87	0,3078	1,20	0,3849
0,22	0,0871	0,55	0,2088	0,88	0,3106	1,21	0,3869
0,23	0,0910	0,56	0,2123	0,89	0,3130	1,22	0,3883
0,24	0,0948	0,57	0,2157	0,90	0,3169	1,23	0,3907
0,25	0,0987	0,58	0,2190	0,91	0,3186	1,24	0,3925
0,26	0,1026	0,59	0,2224	0,92	0,3212	1,25	0,3944
0,27	0,1064	0,60	0,2257	0,93	0,3238	1,26	0,3962
0,28	0,1103	0,61	0,2291	0,94	0,3264	1,27	0,3980
0,29	0,1141	0,62	0,2324	0,95	0,3289	1,28	0,3997
0,30	0,1179	0,63	0,2357	0,96	0,3315	1,29	0,4015
0,31	0,1217	0,64	0,2389	0,97	0,3340	1,30	0,4032
0,32	0,1255	0,65	0,2422	0,98	0,3365	1,31	0,049

Окончание приложения 1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,32	0,4066	1,68	0,4535	2,08	0,4812	2,80	0,4974
1,33	0,4082	1,69	0,4545	2,10	0,4821	2,82	0,4976
1,34	0,4099	1,70	0,4554	2,12	0,4830	2,84	0,4977
1,35	0,4115	1,71	0,4564	2,14	0,4838	2,86	0,4979
1,36	0,4131	1,72	0,4573	2,16	0,4864	2,88	0,4980
1,37	0,4147	1,73	0,4582	2,18	0,4854	2,90	0,4981
1,38	0,4162	1,74	0,4591	2,20	0,4861	2,92	0,4982
1,39	0,4177	1,75	0,4599	2,22	0,4868	2,94	0,4984
1,40	0,4192	1,76	0,4608	2,24	0,4875	2,96	0,4985
1,41	0,4207	1,77	0,4616	2,26	0,4881	2,98	0,4986
1,42	0,422	1,78	0,4625	2,28	0,4887	3,00	0,49865
1,43	0,4236	1,79	0,4633	2,30	0,4893	3,20	0,49931
1,44	0,4251	1,80	0,4641	2,32	0,4898	3,40	0,49966
1,45	0,4265	1,81	0,4649	2,34	0,4904	3,60	0,499841
1,46	0,4279	1,82	0,4656	2,36	0,4909	3,80	0,499928
1,47	0,4292	1,83	0,4664	2,38	0,4913	4,00	0,499968
1,48	0,4306	1,84	0,4671	2,40	0,4918	4,50	0,499997
1,49	0,4319	1,85	0,4678	2,42	0,4922	5,00	0,499997
1,50	0,4332	1,86	0,4686	2,44	0,4927		
1,51	0,4345	1,87	0,4693	2,46	0,4931		
1,52	0,4357	1,88	0,4699	2,48	0,4934		
1,53	0,4370	1,89	0,4706	2,50	0,4938		
1,54	0,4382	1,90	0,4713	2,52	0,4941		
1,55	0,4394	1,91	0,4719	2,54	0,4945		
1,56	0,4406	1,92	0,4726	2,56	0,4948		
1,57	0,4418	1,93	0,4732	2,58	0,4951		
1,58	0,4429	1,94	0,4738	2,60	0,4953		
1,59	0,4441	1,95	0,4744	2,62	0,4956		
1,60	0,4452	1,96	0,4750	2,64	0,4959		
1,61	0,4463	1,97	0,4756	2,66	0,4961		
1,62	0,4474	1,98	0,1761	2,68	0,4963		
1,63	0,4484	1,99	0,4767	2,70	0,4965		
1,64	0,4495	2,00	0,4772	2,72	0,4967		
1,65	0,4505	2,02	0,4783	2,74	0,4969		
1,66	0,4515	2,04	0,4793	2,76	0,4971		
1,67	0,4525	2,06	0,4803	2,78	0,4973		

2. t - распределение Стьюдента

Число степеней свобо-ды,ν	Уровень значимости (двухсторонняя критическая область), α		Число степеней свободы ν	Уровень значимости (двухсторонняя критическая область), α	
	0,10	0,05		0,10	0,05
1	2	3	4	5	6
1	6,31	12,7	17	1,74	2,11
2	2,92	4,30	18	1,73	2,10
3	2,35	3,18	19	1,73	2,09
4	2,13	2,78	20	1,73	2,09
5	2,01	2,57	21	1,72	2,06
6	1,94	2,45	22	1,72	2,07
7	1,89	2,36	23	1,71	2,07
8	1,86	2,31	24	1,71	2,06
9	1,83	2,26	25	1,71	2,06
10	1,81	2,23	26	1,71	2,06
11	1,80	2,20	27	1,71	2,05
12	1,78	2,18	28	1,70	2,05
13	1,77	2,16	29	1,70	2,05
14	1,76	2,14	30	1,70	2,04
15	1,75	2,13	40	1,68	2,02
16	1,75	2,12	60	1,67	2,00
			120	1,66	1,98
ν	0,05	0,025	ν	0,05	0,025
	Уровень значимости (односторонняя критическая область),α			Уровень значимости (односторонняя критическая область),α	

3. Распределение χ^2

Чсло степеней свободы, ν	Уровень значимости, α			Число степеней свободы, ν	Уровень значимости, α		
	0,01	0,025	0,05		0,01	0,025	0,05
1	2	3	4	5	6	7	8
1	6,6	5,0	3,8	16	32,0	28,8	26,3
2	9,2	7,4	6,0	17	33,4	30,2	27,2

1	2	3	4	5	6	7	8
3	11,3	9,4	7,8	18	34,8	31,5	28,9
4	15,1	11,1	9,5	19	36,2	32,9	30,1
5	15,1	12,8	11,1	20	37,6	34,2	31,4
6	16,8	14,4	12,6	21	38,9	35,5	32,7
7	18,5	16,0	14,1	22	40,3	36,8	33,9
8	20,1	17,5	15,5	23	41,6	38,1	35,2
9	217	19,0	16,9	24	43,0	39,4	36,4
10	23,2	20,5	18,3	25	44,3	40,6	37,7
11	24,7	21,9	19,7	26	45,6	41,9	38,9
12	26,2	24,3	21,0	27	47,0	43,2	40,1
13	27,7	24,7	22,4	28	48,3	44,5	41,3
14	29,1	26,1	23,7	29	49,6	45,7	42,6
15	30,6	27,5	25,0	30	50,9	47,0	43,8

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1984.
2. Айвазян С.А. и др. Прикладная статистика. – М: Финансы и кредит. Т. 1. Первичная обработка, 1983. Т. 2. Исследование зависимостей, 1985.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Наука, 1980.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2001.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1999.
6. Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Выш. шк. , 1993.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. – Мн.: Изд-во.БГУ , 1975 . – 278 с .
8. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию.– Мн.: Выш. школа, 1978. – 256 с.
9. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование Мн.: Выш. школа, 1994. – 286 с.

10. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование / Под общ. ред. А.В.Кузнецова.– Мн.: Выш. школа, 1995. –382с
11. Альсевич В.В., Габасов Р., Глушенков В.С. Оптимизация линейных экономических моделей. Статические задачи. – Мн.: БГУ, 2000. – 210 с.

СОДЕРЖАНИЕ