

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**О. Г. Бобрович, В. В. Тульев**

# **ФИЗИКА**

**В 5-ти частях**

**Часть 2**

## **ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК**

**Тексты лекций  
по дисциплине «Физика»  
для студентов специальности 1-48 01 02  
«Химическая технология органических веществ,  
материалов и изделий»**

Минск 2011

УДК [537.2+537.3](075.8)  
ББК 22.33я73  
Б72

Рассмотрены и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экспериментальной физики БГПУ им. Максима Танка  
*И. С. Ташлыков;*

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики БНТУ *А. В. Чигарев*

**Бобрович, О. Г.**

Б72 Физика. В 5 ч. Ч. 2. Электростатика. Постоянный электрический ток : тексты лекций по дисциплине «Физика» для студентов специальности 1-48 01 02 «Химическая технология органических веществ, материалов и изделий» / О. Г. Бобрович, В. В. Тульев. – Минск : БГТУ, 2011. – 93 с.

В пособии кратко изложен материал лекций по разделам «Электростатика» и «Постоянный электрический ток» для студентов специальности 1-48 01 02 «Химическая технология органических веществ, материалов и изделий» дневной формы обучения.

Пособие предназначено для организации самостоятельной и аудиторной работы на лекционных, практических и лабораторных занятиях по дисциплине «Физика».

УДК [537.2+537.3](075.8)  
ББК 22.33я73

© УО «Белорусский государственный технологический университет», 2011  
© Бобрович О. Г., Тульев В. В., 2011

# Тема 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

## Лекция № 1

1.1. Электрический заряд. Свойства электрического заряда. Закон сохранения электрического заряда.

1.2. Закон Кулона.

1.3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиции электростатических полей.

### **1.1. Электрический заряд. Свойства электрического заряда. Закон сохранения электрического заряда.**

*Электрический заряд* – это физическая величина, являющаяся количественной мерой электромагнитных взаимодействий.

Единица измерения электрического заряда в системе СИ  $[q] = 1 \text{ Кл}$  (кулон).

Электрические заряды обладают следующими свойствами:

1. Существуют только два вида заряда: *отрицательные* и *положительные*.

Опыты, проведенные еще в самом начале XVIII в., показали, что электризация бывает двух и только двух родов: электризация, совпадающая по качеству с электризацией стекла, потертого о кожу (называется *положительной*), и электризация, совпадающая по качеству с электризацией кожи, потертой стеклом (называется *отрицательной*).

2. Одноименные заряды *отталкиваются*, разноименные заряды *притягиваются*.

3. Существует *элементарный* заряд  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ . Носителями элементарных зарядов являются электроны ( $-e$ ) и протоны ( $+e$ ). У любого заряженного тела заряд по величине не может быть меньше элементарного.

4. Электрический заряд *дискретен*, т. е. электрический заряд любого тела состоит из целого числа положительных и отрицательных элементарных зарядов:

$$q = N_+e + N_-e, \quad (1.1.1)$$

где  $N_+$  и  $N_-$  – целые числа, равные соответственно количеству положительных и отрицательных элементарных зарядов. Это свойство опытным путем доказал американский физик Роберт Милликен.

5. Электрический заряд *инвариантен*, т. е. значение электрического заряда не зависит от скорости его движения. Так как скорость движения зависит от выбора системы отсчета, то можно сказать: значение электрического заряда не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Из обобщения опытных данных был установлен фундаментальный закон природы – *закон сохранения заряда*: заряды не создаются и не пропадают, они могут лишь перемещаться внутри тела или от одного тела к другому. Другая формулировка *закона сохранения заряда*: алгебраическая сумма зарядов тел и частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i = \text{const.} \quad (1.1.2)$$

Под *электрически изолированной системой* понимают такую систему, из которой не забирают и в которую не вносят электрические заряды.

Под *точечными* зарядами подразумеваются такие заряженные тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Если заряженное тело нельзя назвать точечным, то вводят понятие *распределенного* заряда. Для характеристики распределенного заряда используют следующие величины:

– если заряд распределен по объему  $V$  тела, то для его характеристики используют *объемную плотность*  $\rho$  заряда:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV \Rightarrow q = \int_V \rho dV. \quad (1.1.3)$$

Единица измерения объемной плотности заряда в системе СИ  $[\rho] = 1 \text{ Кл/м}^3$ ;

– если заряд распределен по поверхности тела площадью  $S$ , то для его характеристики используют *поверхностную плотность*  $\sigma$  заряда:

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma dS \Rightarrow q = \int_S \sigma dS. \quad (1.1.4)$$

Единица измерения поверхностной плотности заряда в системе СИ  $[\sigma] = 1 \text{ Кл/м}^2$ ;

– если заряд распределен по длине  $l$  тела, то для его характеристики используют *линейную плотность*  $\lambda$  заряда:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda dl \Rightarrow q = \int_l \lambda dl. \quad (1.1.5)$$

Единица измерения линейной плотности заряда в системе СИ  $[\lambda] = 1 \text{ Кл/м}$ .

### 1.2. Закон Кулона.

Опыты показали, что взаимодействие заряженных тел зависит от их формы и размеров. Поэтому для установления закона взаимодействия между заряженными телами сначала рассматривают точечные заряды.

Закон взаимодействия двух точечных зарядов был экспериментально установлен французским физиком Шарлем Огюстеном Кулоном в 1785 г. на основании измерений, произведенных с помощью крутильных весов.

В результате своих опытов Ш. Кулон пришел к выводу, что сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Направление силы совпадает с прямой, соединяющей взаимодействующие заряды (рис. 1.2.1).

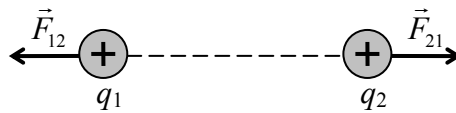


Рис. 1.2.1

Закон Кулона определяется формулой

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \quad (1.2.1)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная;  $|q_1|$ ,  $|q_2|$  – модули точечных зарядов;  $r$  – расстояние между ними.

В векторном виде закон Кулона определяется формулой

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12}, \quad \text{или} \quad \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{21}, \quad (1.2.2)$$

где  $\vec{r}_{12}$  и  $\vec{r}_{21}$  – радиусы-векторы, соединяющие заряды 2 и 1 или 1 и 2 (рис. 1.2.2).

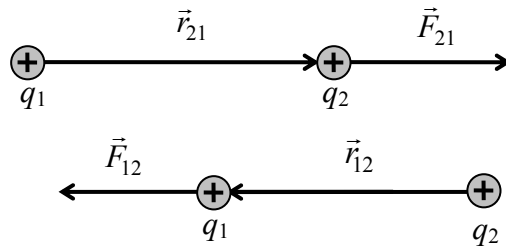


Рис. 1.2.2

Закон Кулона справедлив также для заряженных тел сферической формы, заряды которых распределены равномерно по объему или по поверхности этих тел.

**1.3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиции электростатических полей.**

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем *электрическое поле* (если поле создается неподвижными зарядами, то такое поле называют *электростатическим*). Это поле проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку электрический заряд оказывается под действием силы. По величине силы, действующей на данный заряд, можно судить об интенсивности поля. Для обнаружения и исследования электрического поля используют *пробный заряд*  $q_{\text{пр}}$ . Он должен быть малым по величине, чтобы собственным полем не исказить исследуемое поле, и принадлежать телу малых размеров, чтобы можно было исследовать поле в малых областях пространства. Для удобства пробный заряд условились считать *положительным*.

Если поместить пробный заряд в некоторую точку поля (рис. 1.3.1), создаваемого зарядом  $q$ , то можно обнаружить, что на пробный заряд  $q_{\text{пр}}$  действует сила  $F$ , которая согласно закону Кулона (1.2.1) равна:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{пр}}|q|}{r^2}. \quad (1.3.1)$$

Из выражения (1.3.1) видно, что отношение  $F/q_{\text{пр}}$  для всех пробных зарядов одинаково и зависит лишь от величины заряда  $q$ , создающего поле, и расстояния  $r$  между зарядом и точкой в исследуемом поле. Поэтому отношение  $\vec{E} = \vec{F}/q_{\text{пр}}$  принято в качестве величины,

характеризующей электрическое поле, и называется *напряженностью* электрического поля в данной точке.

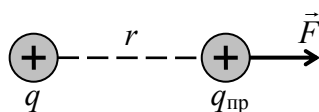


Рис. 1.3.1

*Напряженность электрического поля в данной точке* есть физическая величина, определяемая силой, действующей на единичный пробный заряд, помещенный в эту точку поля и имеющий направление этой силы. Напряженность электрического поля является *силовой* характеристикой поля.

Единица измерения напряженности электрического поля  $[E] = 1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ В/м}$ .

Напряженность поля точечного заряда можно представить в виде:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \quad \text{и} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (1.3.2)$$

где  $\vec{r}$  – вектор, соединяющий заряд  $q$  и данную точку.

Вектор напряженности поля точечного заряда направлен вдоль прямой, проходящей через заряд и данную точку поля, от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен (рис. 1.3.2).

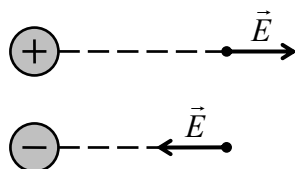


Рис. 1.3.2

Графически электрическое поле можно описать с помощью *линий напряженности*, которые называются *силовыми линиями*. Под линией напряженности подразумевают такую линию, в каждой точке которой вектор напряженности направлен по касательной (рис. 1.3.3). Этим линиям приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности в каждой точке линии. Линия напряженности определяет направление напряженности электростатического поля в каждой точке, через которую она проходит. Поэтому линии напряженности не пересекаются, т. к. в каждой точке поля напряженность имеет

свое определенное направление. Густота линий выбирается таким образом, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной линиям площадки, было равно числовому значению вектора напряженности.

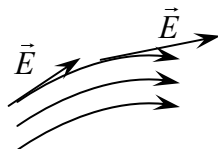


Рис. 1.3.3

Линии напряженности начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. Линии напряженности поля точечного заряда – это прямые линии, выходящие из заряда, если он положительный, и входящие в заряд, если он отрицательный (рис. 1.3.4).

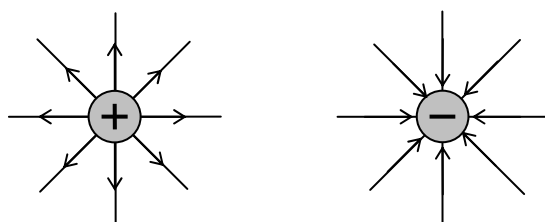


Рис. 1.3.4

Примеры графического изображения электростатических полей:  
– поле электрического диполя (рис. 1.3.5);

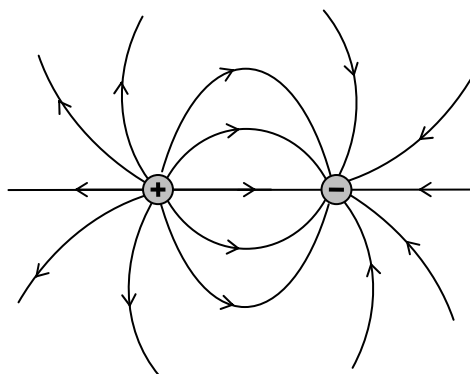


Рис. 1.3.5

– поле системы двух одинаковых положительных зарядов (рис. 1.3.6);



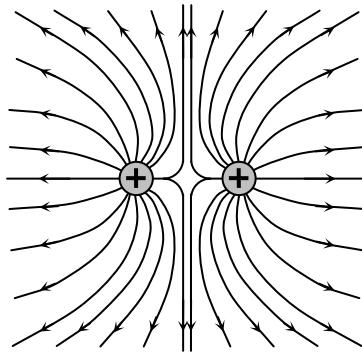


Рис. 1.3.6

– поле плоского заряженного конденсатора (рис. 1.3.7).

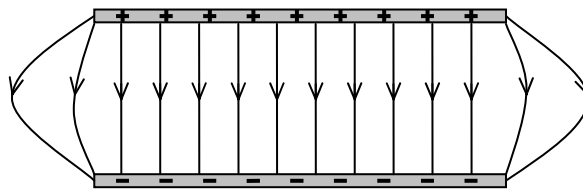


Рис. 1.3.7

Если электростатическое поле создается системой зарядов, то для нахождения напряженности поля используют *принцип суперпозиции электрических полей*: напряженность электростатического поля системы зарядов в данной точке равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов системы в отдельности в этой же точке:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.3.3)$$

Если электростатическое поле создается заряженным телом с распределенным зарядом, то его разбивают на элементарные заряды  $dq$ . Такие заряды можно считать точечными, и для них будет справедлива формула (1.3.2):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \quad \text{и} \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \vec{r}. \quad (1.3.4)$$

Применяя принцип суперпозиции в случае распределенного заряда, суммирование необходимо заменить интегрированием:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}. \quad (1.3.5)$$

Принцип суперпозиции электрических полей (1.3.3), (1.3.5) позволяет вычислить напряженность поля любой системы зарядов.

## Лекция № 2

1.4. Поток вектора напряженности электростатического поля.

1.5. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в интегральной форме.

1.6. Примеры применения теоремы Гаусса.

1.7. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в дифференциальной форме.

### 1.4. Поток вектора напряженности электростатического поля.

Чтобы с помощью линий напряженности можно было охарактеризовать не только направление, но и значение напряженности электростатического поля, условились, что число линий напряженности  $dN$ , пересекающих единичную площадку  $dS_0$ , расположенную перпендикулярно линиям напряженности, равно модулю напряженности  $E$  поля в этой точке (рис. 1.4.1), т. е. выполняется условие

$$E = \frac{dN}{dS_0}. \quad (1.4.1)$$

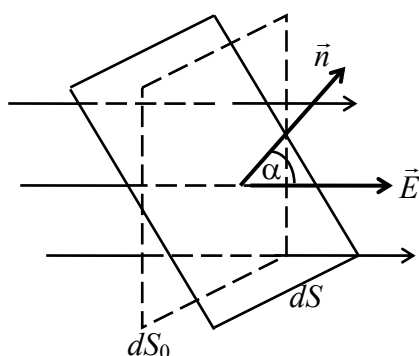


Рис. 1.4.1

Тогда число линий, пересекающих некоторую произвольную площадку  $dS$ , равно:

$$dN = E dS_0 = E \cos \alpha dS = E_n dS = \vec{E} d\vec{S}, \quad (1.4.2)$$

где  $E \cos \alpha = E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на направление нормали  $\vec{n}$ ;  $d\vec{S} = dS \vec{n}$  – вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением единичной нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ .

Величину  $dN$  назвали *поток вектора напряженности* через площадку  $dS$  и обозначили

$$d\Phi_E = E_n dS = \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.4.3)$$

Для произвольной поверхности  $S$  поток вектора напряженности через эту поверхность равен:

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.4.4)$$

Поток вектора напряженности является алгебраической величиной и зависит не только от конфигурации поля, но и от выбора направления нормали.

### 1.5. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в интегральной форме.

Рассмотрим поле точечного заряда  $q$  ( $q > 0$ ) и вычислим поток вектора напряженности через сферу радиуса  $r$ , в центре которой находится заряд  $q$  (рис. 1.5.1). В этом случае вектор  $\vec{E}$  в любой точке выбранной сферической поверхности будет перпендикулярным поверхности и одинаковым по модулю:  $E_n = E = \text{const}$ .

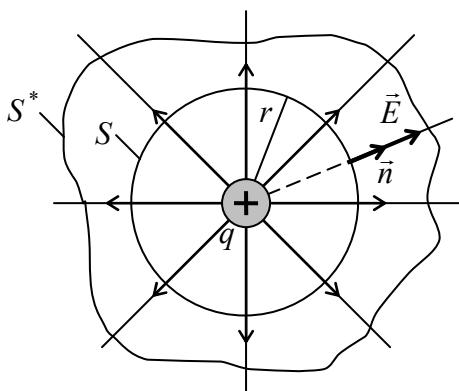


Рис. 1.5.1

Полное число линий, пересекающих сферическую поверхность  $S$ , будет равно:

$$\Phi_E = N = \int_S dN = \int_S E_n dS = \int_S E dS = E \int_S dS = ES. \quad (1.5.1)$$

Так как для точечного заряда напряженность  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ , то

$$\Phi_E = N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.5.2)$$

Из формулы (1.5.2) следует, что число линий, пересекающих сферическую поверхность  $S$ , на любом расстоянии от заряда будет одним и тем же. Полученный результат также справедлив и для замкнутой поверхности  $S^*$  произвольной формы, охватывающей заряд  $q$ , поскольку каждая линия напряженности, пронизывающая сферу  $S$ , пройдет и сквозь поверхность  $S^*$ .

Если замкнутая поверхность  $S^{**}$  не охватывает заряд (рис. 1.5.2), создающий поле, то общее количество линий напряженности, входящих внутрь поверхности  $S^{**}$ , будет равно количеству линий, выходящих из нее. Поэтому поток вектора напряженности в этом случае будет равен нулю. Для поля точечного заряда справедлива *теорема, предложенная Карлом Фридрихом Гауссом*: поток вектора напряженности поля точечного заряда  $q$  сквозь любую замкнутую поверхность  $S$  равен заряду  $q/\epsilon_0$ , если эта поверхность охватывает заряд, и равен нулю, если поверхность не охватывает заряд.

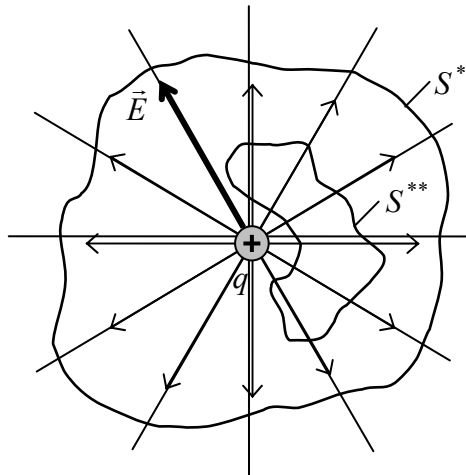


Рис. 1.5.2

С учетом принципа суперпозиции теорему Гаусса можно распространить на произвольную систему  $q_1, q_2, \dots, q_n$  точечных зарядов. Допустим, что внутри замкнутой поверхности  $S$  находится  $k$  точечных зарядов:  $q_1, q_2, \dots, q_k$ . В силу принципа суперпозиции напряженность поля, создаваемого всеми зарядами, равна:  $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$ . Поэтому поток вектора напряженности через замкнутую поверхность  $S$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left( \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}. \quad (1.5.3)$$

Интеграл, стоящий под знаком суммы, равен  $q/\epsilon_0$  (если заряд находится внутри замкнутой поверхности) или нулю (если находится вне замкнутой поверхности). Следовательно,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^k q_i, \quad \text{или} \quad \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^k q_i. \quad (1.5.4)$$

Получили *теорему Гаусса в интегральной форме*: поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ .

Если электростатическое поле создается распределенным зарядом, то теорема Гаусса будет иметь вид:

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (1.5.5)$$

где  $q$  – заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ . Величину заряда  $q$  можно найти, используя формулы (1.1.3)–(1.1.5).

В ряде случаев, используя теорему Гаусса, характеристики электростатического поля можно рассчитать проще, чем, например, используя принцип суперпозиции. Теорему Гаусса удобно применять для расчета характеристик симметричных электростатических полей (т. е. полей, создаваемых симметричными заряженными телами).

### **1.6. Примеры применения теоремы Гаусса.**

*1. Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.*

Бесконечная плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью  $+\sigma$  (рис. 1.6.1). Из соображений симметрии следует, что вектор  $\vec{E}$  направлен перпендикулярно плоскости. Так как заряженная плоскость бесконечная, то числовое значение напряженности  $E$  ее поля будет одинаковым во всех точках пространства, расположенных на одинаковых расстояниях слева и справа от плоскости. В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндрическую поверхность, основания которой параллельны плоскости, а ось перпендикулярна ей. Тогда в точках левого и правого оснований проекция  $E_n = E = \text{const}$ , а в точках боковой поверхности  $E_n = 0$ , т. к. вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен нормали  $\vec{n}$  к боковой поверхности. Поток вектора  $\vec{E}$  через замкнутую цилиндрическую поверхность будет равен:

$$\begin{aligned} \oint_S E_n dS &= \int_{S_1} E_n dS + \int_{S_2} E_n dS + \int_{S_{\text{бок}}} E_n dS = \int_{S_1} E_n dS + \int_{S_2} E_n dS = \\ &= \int_S E dS + \int_S E dS = 2E \int_S dS = 2ES. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической поверхности, равен:  $q = \sigma S$ . Согласно теореме Гаусса получаем:

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow 2ES = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.6.2)$$

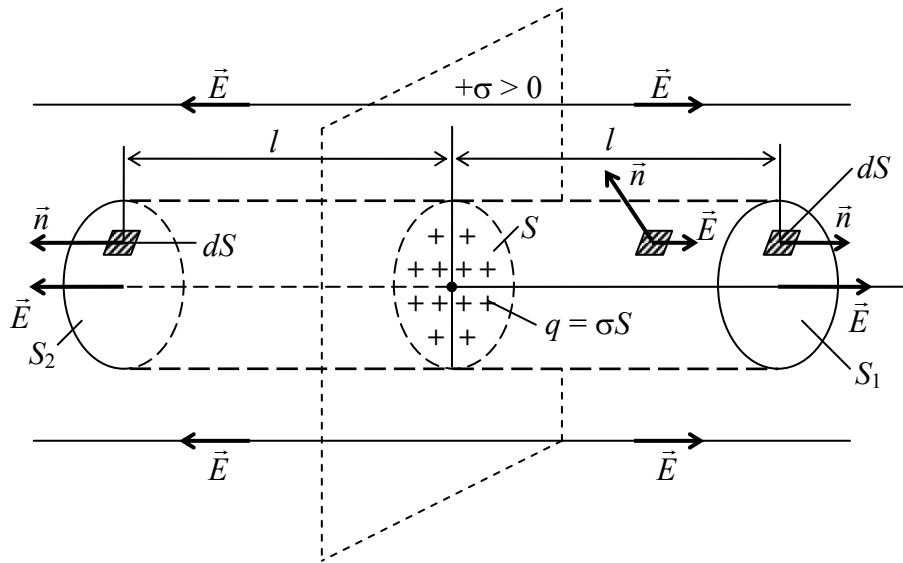


Рис. 1.6.1

Напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости определяется выражением

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.6.3)$$

Из формулы (1.6.3) следует, что напряженность не зависит от расстояния до плоскости, а следовательно, она одинакова по модулю во всех точках поля. Это означает, что поле равномерно заряженной плоскости *однородно*.

2. *Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной нити.*

Найдем поле бесконечной равномерно заряженной нити с линейной плотностью заряда  $\tau$  (рис. 1.6.2). Из соображений симметрии следует, что вектор напряженности  $\vec{E}$  электрического поля на-

правлен радиально, т. е. перпендикулярно к оси заряженной нити. Причем во всех точках, равноудаленных от оси нити, численные значения напряженности  $E$  поля одинаковы. Поэтому в качестве замкнутой выберем цилиндрическую поверхность, основания которой перпендикулярны нити, а ось совпадет с ней. Тогда во всех точках верхнего и нижнего оснований проекция вектора напряженности на нормаль  $E_n = 0$ , а в точках на боковой поверхности  $E_n = E = \text{const}$ , т. к. вектор  $\vec{E}$  совпадает с нормалью  $\vec{n}$  к боковой поверхности. Поток вектора  $\vec{E}$  через замкнутую цилиндрическую поверхность будет равен:

$$\begin{aligned} \oint_S E_n dS &= \int_{S_1} E_n dS + \int_{S_{\text{бок}}} E_n dS + \int_{S_2} E_n dS = \\ &= \int_{S_{\text{бок}}} E_n dS = E \int_{S_{\text{бок}}} dS = ES_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r l. \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

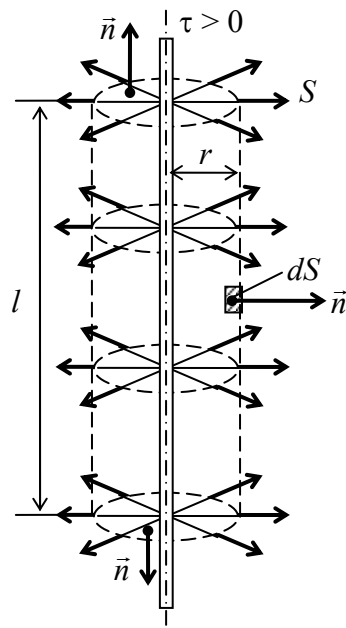


Рис. 1.6.2

Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической поверхности, равен:  $q = \tau l$ . Согласно теореме Гаусса получаем:

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \tau l \Rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.6.5)$$

То есть получаем, что напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной нитью, равна:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.6.6)$$

### 3. Электростатическое поле равномерно заряженной сферы.

Сферическая поверхность радиуса  $R$  с общим зарядом  $q$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью  $+\sigma$ . Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией. Линии напряженности будут направлены радиально. Поэтому выберем замкнутую поверхность в виде сферы  $S$  радиуса  $r$ , имеющей общий центр с заряженной сферой. В этом случае вектор  $\vec{E}$ , направленный по радиальным линиям, в любой точке выбранной сферической поверхности будет перпендикулярным поверхности и одинаковым по модулю:  $E_n = E = \text{const}$  (рис. 1.6.3).

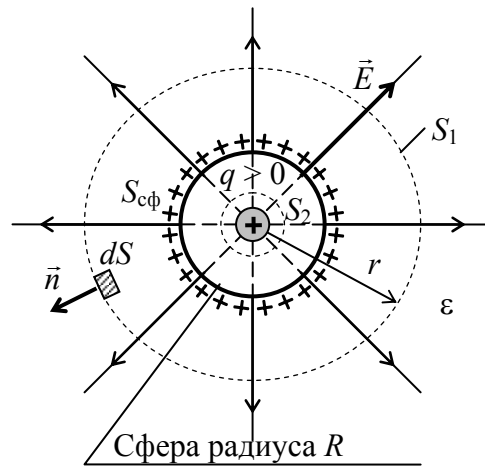


Рис. 1.6.3

1) рассмотрим поле вне сферы ( $r > R$ ). Внутри выбранной поверхности  $S_1$  попадает весь заряд  $q$  сферы:

$$q = \sigma S_{\text{сф}} = \sigma \cdot 4\pi R^2. \quad (1.6.7)$$

Применим теорему Гаусса:

$$E \oint_{S_1} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1.6.8)$$

С учетом формулы (2.16) получаем:

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}; \quad (1.6.9)$$



2) рассмотрим поле внутри сферы ( $r < R$ ). Замкнутая сферическая поверхность  $S_2$  не содержит внутри зарядов, поэтому

$$\oint_{S_2} E_n dS = 0 \Rightarrow \oint_{S_2} E dS = 0 \Rightarrow E \oint_{S_2} dS = 0 \Rightarrow E = 0. \quad (1.6.10)$$

То есть внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует ( $E = 0$ ).

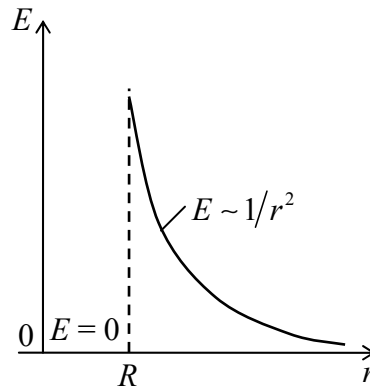


Рис. 1.6.4

Графическая зависимость напряженности  $E$  электростатического поля равномерно заряженной сферы от расстояния  $r$  представлена на рис. 1.6.4.

### 1.7. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в дифференциальной форме.

Для решения задачи о нахождении поля по известному неоднородному распределению зарядов с плотностью  $\rho(x, y, z)$  нужны уравнения, содержащие характеристики поля в одной его точке или в ее малой окрестности. Получим такое уравнение из интегральной теоремы Гаусса.

Для преобразования уравнения (1.5.5) применим к его левой части теорему Остроградского – Гаусса, согласно которой поток вектора  $\vec{A}$  сквозь любую замкнутую поверхность равен интегралу от его дивергенции по объему, охватываемому этой поверхностью, т. е.

$$\oint_S A_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV, \quad (1.7.1)$$

где  $\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$  – дивергенция вектора  $\vec{A}$ .

Правую часть теоремы Гаусса (1.5.5) можно выразить через объемную плотность  $\rho$  заряда:

$$q = \int_V \rho dV. \quad (1.7.2)$$

Тогда теорема Гаусса примет вид:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} q \Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.7.3)$$

Поскольку поверхность  $S$ , а следовательно, и объем  $V$ , по которому проводится интегрирование, являются произвольными, то из последнего уравнения получим:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.7.4)$$

Уравнение (1.7.4) называется *теоремой Гаусса для электростатического поля в вакууме в дифференциальной форме*.

### Лекция № 3

1.8. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле.

1.9. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной и дифференциальной формах.

1.10. Потенциал. Разность потенциалов. Принцип суперпозиции для электростатических потенциалов.

1.11. Связь между напряженностью и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности.

#### **1.8. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле.**

На помещенный в электростатическое поле напряженностью  $\vec{E}$  пробный заряд  $q_{\text{пр}}$  действует сила  $\vec{F} = q_{\text{пр}}\vec{E}$ . Если заряд перемещается в поле из точки 1 в точку 2, сила  $\vec{F}$  будет совершать работу. Поскольку любое заряженное тело, создающее поле, можно рассматривать как совокупность точечных зарядов, то для вычисления работы в любом электростатическом поле определим вначале работу по перемещению пробного заряда  $q_{\text{пр}}$  в поле точечного неподвижного заряда  $q$  (рис. 1.8.1).

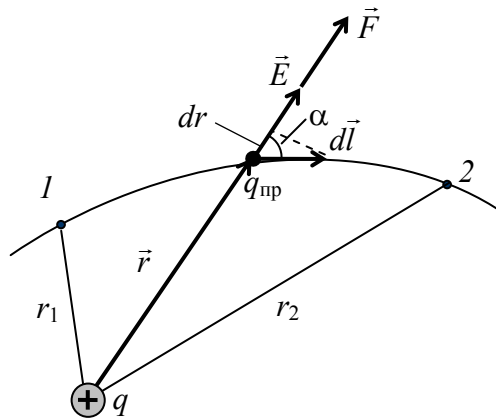


Рис. 1.8.1

Элементарная работа, которая совершается силами поля над зарядом  $q_{\text{пр}}$  при перемещении, будет равна:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = q_{\text{пр}}\vec{E}d\vec{l} = q_{\text{пр}}Edl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{пр}}q}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{пр}}q}{r^2} dr, \quad (1.8.1)$$

где  $dl \cos \alpha = dr$ .

Теперь найдем работу по перемещению заряда  $q_{\text{пр}}$  между точками 1 и 2:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{пр}}}{r^2} dr = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.8.2)$$

Из формулы (1.8.2) видно, что работа электростатического поля по перемещению заряда не зависит от траектории, по которой перемещается заряд, а определяется только его начальным и конечным положениями. Следовательно, электростатическое поле является *потенциальным*, а электростатические силы – *консервативными*\*.

### **1.9. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной и дифференциальной формах.**

Из формулы (1.8.2) видно, что работа, которая совершается при перемещении заряда во внешнем электростатическом поле по любой замкнутой траектории, будет равна нулю:

$$A = \oint_L dA = 0. \quad (1.9.1)$$

Так как  $dA = \vec{F}d\vec{l} = q_{\text{пр}}\vec{E}d\vec{l}$ , то

$$\oint_L dA = \oint_L q_{\text{пр}}\vec{E}d\vec{l} = q_{\text{пр}} \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0; A = \oint_L dA = 0. \quad (1.9.2)$$

Интеграл  $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E \cos \alpha dl = \oint_L E_l dl$  называется *циркуляцией вектора напряженности электростатического поля*.

Из формулы (1.9.2) следует *теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной форме*: циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру всегда равна нулю. Выражение (1.9.2) является *условием консервативности электростатического поля*.

Получим *теорему о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в дифференциальной форме*. Для этого к левой части первого уравнения (1.9.2) применим *теорему Стокса*, которая

---

\*См.: Механика и молекулярная физика [Электронное издание]: учеб. электрон. изд. комбинированного распространения / В. В. Тульев, О. Г. Бобрович; Белорус. гос. технол. ун-т. – Минск: БГТУ, 2009. – 1 электрон. опт. диск (CD-RW). – (Электронные учебные пособия БГТУ).

гласит, что циркуляция вектора  $\vec{A}$  по произвольному контуру  $L$  равна потоку ротора этого вектора сквозь любую поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{A})_n dS, \quad (1.9.3)$$

где  $\text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$  – ротор вектора  $\vec{A}$ .

Получим:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{E})_n dS = 0 \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.9.4)$$

Выражение (1.9.4) показывает, что из потенциального характера электростатического поля следует, что оно является *безвихревым*.

### ***1.10. Потенциал. Разность потенциалов. Принцип суперпозиции для электростатических потенциалов.***

Работа сил консервативного поля может быть представлена как изменение потенциальной энергии, взятое с обратным знаком:

$$A_{12} = -(\Pi_2 - \Pi_1) = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (1.10.1)$$

Сопоставление формул (1.8.2) и (1.10.1) приводит к выражению для потенциальной энергии заряда  $q_{\text{пр}}$  в поле точечного заряда  $q$ :

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{пр}}}{r} + \text{const}. \quad (1.10.2)$$

Значение константы (const) выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность потенциальная энергия обращалась в нуль, поэтому получаем, что  $\text{const} = 0$ , а

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{пр}}}{r}. \quad (1.10.3)$$

Потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд, зависит не только от его значения, но и от величин, характеризующих электростатическое поле. Поэтому различные пробные заряды в одной и той же точке поля будут обладать различной энергией. Но отношение  $\Pi/q_{\text{пр}}$  для всех зарядов будет одним и тем же. Это отношение называется *потенциалом поля в данной точке*:

$$\varphi = \frac{\Pi}{q_{\text{пр}}}. \quad (1.10.4)$$

*Потенциал* есть скалярная физическая величина, численно равная потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке единичный пробный заряд. Потенциал является *энергетической* характеристикой электрического поля.

Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом, равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (1.10.5)$$

Если  $q > 0$ , то  $\varphi > 0$ ; если  $q < 0$ , то  $\varphi < 0$ .

Любой заряд  $q$ , находящийся в точке поля с потенциалом  $\varphi$ , обладает потенциальной энергией  $\Pi = q\varphi$ , а работа сил поля, совершаемая при перемещении заряда из точки  $1$  в точку  $2$ , может быть выражена следующим образом:

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi. \quad (1.10.6)$$

Величину  $(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta\varphi$  называют *разностью потенциалов* между точками  $1$  и  $2$ .

Если заряд из точки  $1$  с потенциалом  $\varphi$  удаляется на бесконечность (где потенциал равен нулю), то работа сил поля равна  $A_{1\infty} = q\varphi$ . Отсюда следует, что *потенциал электростатического поля численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при его удалении из данной точки на бесконечность*.

В системе СИ за единицу измерения потенциала  $\varphi$  и разности потенциалов  $\Delta\varphi$  принимают 1 В (вольт).

Рассмотрим поле, создаваемое системой точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Расстояния от каждого из зарядов до данной точки поля обозначим  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Работа, совершаемая силами этого поля по перемещению пробного заряда  $q_{\text{пр}}$ , будет равна алгебраической сумме работ сил электростатического поля, создаваемого каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (1.10.7)$$

Каждая из работ  $A_i$  равна:

$$A_i = \frac{q_{\text{пр}}q_i}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right). \quad (1.10.8)$$

Следовательно,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_{\text{пр}} q_i \left( \frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_{\text{пр}}}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_{\text{пр}}}{r_{i2}}. \quad (1.10.9)$$

Так как  $A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2$ , то

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_{\text{пр}}}{r_i} = q_{\text{пр}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}. \quad (1.10.10)$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = \frac{\Pi}{q_{\text{пр}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.10.11)$$

Из выражения (1.10.11) следует *принцип суперпозиции потенциалов*: потенциал поля, создаваемого системой зарядов, в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.10.12)$$

Если электростатическое поле создается заряженным телом с распределенным зарядом, то его разбивают на элементарные заряды  $dq$ . Такие заряды можно считать точечными, и для них можно применить формулу (1.10.5):

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}. \quad (1.10.13)$$

Применяя принцип суперпозиции (1.10.12) в случае распределенного заряда, суммирование необходимо заменить интегрированием:

$$\varphi = \int d\varphi. \quad (1.10.14)$$

Принцип суперпозиции потенциалов (1.10.12), (1.10.14) позволяет вычислить потенциал поля любой системы зарядов.

### ***1.11. Связь между напряженностью и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности.***

Для потенциального поля между консервативной (потенциальной) силой и потенциальной энергией существует взаимосвязь:

$$\vec{F} = -\text{grad}\Pi = -\nabla\Pi, \quad (1.11.1)$$

где  $\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  – оператор Гамильтона.

Поскольку  $\vec{F} = q\vec{E}$ , а  $\Pi = q\varphi$ , то из формулы (1.11.1) следует:

$$q\vec{E} = -\text{grad}(q\varphi) \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad}\varphi \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}\right). \quad (1.11.2)$$

Напряженность электростатического поля равна градиенту потенциала со знаком минус. Знак минус показывает, что вектор напряженности направлен в сторону убывания потенциала.

Для радиально-симметричного поля выражение (1.11.2) можно записать в виде:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}. \quad (1.11.3)$$

Для проекции вектора  $\vec{E}$  на произвольное направление  $l$  справедливо соотношение

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \quad (1.11.4)$$

Для графического изображения распределения потенциала используются *эквипотенциальные поверхности* – поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение, т. е.

$$\varphi = \text{const}. \quad (1.11.5)$$

При перемещении по эквипотенциальной поверхности на отрезок  $dl$  потенциал не изменяется ( $d\varphi = 0$ ). Согласно формуле (1.11.4), составляющая вектора  $\vec{E}$ , касательная к поверхности, будет равна нулю. Отсюда следует, что вектор  $\vec{E}$  в каждой точке направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку. Так как вектор  $\vec{E}$  направлен по касательной к линии напряженности, то линии напряженности в каждой точке перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля, следовательно, таких поверхностей может быть построено бесконечное множество. Условились проводить поверхности таким образом, чтобы разность потенциалов для двух соседних поверхностей была всюду одна и та же. Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине напряженности поля. Действительно, чем гуще располагаются эквипотенциальные



поверхности, тем быстрее изменяется потенциал при перемещении вдоль нормали к поверхности. Следовательно, где эти поверхности расположены гуще, там напряженность поля больше.

На рис. 1.11.1, *а* изображены эквипотенциальные поверхности точечного заряда; на рис. 1.11.1, *б* – эквипотенциальные поверхности диполя.

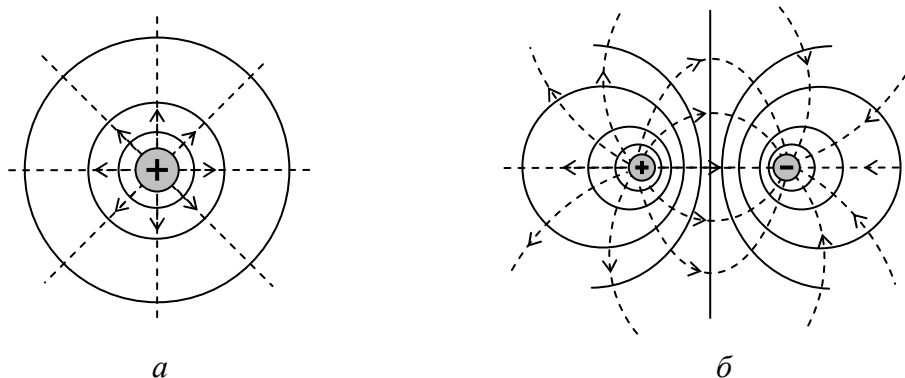


Рис. 1.11.1

Сплошными линиями показаны сечения эквипотенциальных поверхностей, пунктиром – силовые линии поля.

## Тема 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

### Лекция № 4

2.1. Электрический диполь. Электрический момент диполя. Напряженность и потенциал поля диполя.

2.2. Диполь во внешних однородном и неоднородном электростатических полях.

2.3. Энергия диполя во внешнем электростатическом поле.

2.4. Свободные и связанные заряды в веществе. Типы диэлектриков.

2.5. Поляризация диэлектриков, виды поляризации.

#### **2.1. Электрический диполь. Электрический момент диполя. Напряженность и потенциал поля диполя.**

Диполем называется совокупность двух равных зарядов противоположного знака, находящихся на расстоянии, малом по сравнению с расстоянием до точек, в которых рассматривается его электрическое поле. Линия, проходящая через заряды, называется *осью диполя*. Вектор  $\vec{l}$ , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется *плечом диполя* (рис. 2.1.1). Вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению модуля заряда на плечо диполя, называется *электрическим моментом диполя*:

$$\vec{p}_e = q\vec{l}. \quad (2.1.1)$$

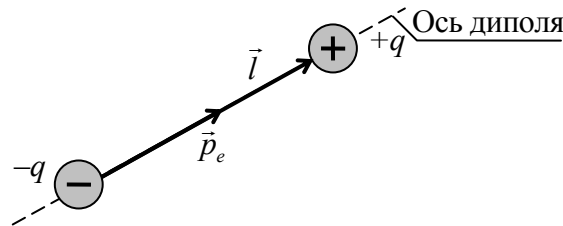


Рис. 2.1.1

Вычислим сначала потенциал, а затем напряженность поля диполя. Это поле обладает осевой симметрией. Поэтому картина поля в любой плоскости, проходящей через ось диполя, будет одной и той же, причем вектор  $\vec{E}$  лежит в этой плоскости. Положение точки относительно диполя будем характеризовать с помощью радиус-вектора  $\vec{r}$  либо с помощью полярных координат  $r$  и  $\theta$  (рис. 2.1.2).

Расстояния от зарядов  $+q$  и  $-q$  до данной точки  $A$  обозначим соответственно через  $r_+$  и  $r_-$ .

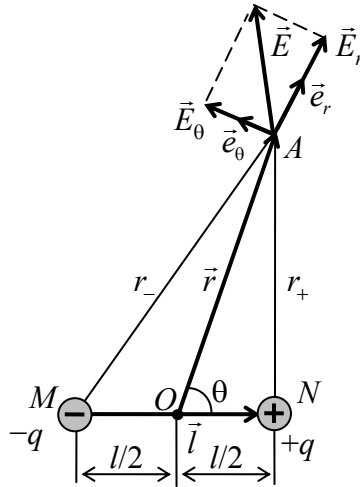


Рис. 2.1.2

Потенциал в точке  $A$  равен:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right). \quad (2.1.2)$$

Так как  $r \gg l$  (согласно определению электрического диполя), то можно считать, что  $r_+ r_- \approx r^2$ , тогда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_- - r_+}{r^2} \right). \quad (2.1.3)$$

Используя теорему косинусов, запишем для треугольников  $\Delta MAO$  и  $\Delta NAO$  (рис. 4.2) выражения

$$r_-^2 = r^2 + \left( \frac{l}{2} \right)^2 - 2r \frac{l}{2} \cos(180 - \theta) = r^2 + \left( \frac{l}{2} \right)^2 + rl \cos \theta; \quad (2.1.4)$$

$$r_+^2 = r^2 + \left( \frac{l}{2} \right)^2 - 2r \frac{l}{2} \cos \theta = r^2 + \left( \frac{l}{2} \right)^2 - rl \cos \theta. \quad (2.1.5)$$

Вычтем из выражения (2.1.4) выражение (2.1.5) и с учетом того, что  $r_- + r_+ \approx 2r$ , получим:

$$\begin{aligned} r_-^2 - r_+^2 = 2rl \cos \theta &\Rightarrow (r_- - r_+)(r_- + r_+) = 2rl \cos \theta \Rightarrow \\ &\Rightarrow (r_- - r_+)2r = 2rl \cos \theta \Rightarrow r_- - r_+ = l \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Подставим результат выражения (2.1.6) в выражение (2.1.3):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{l \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^2} \cos \theta. \quad (2.1.7)$$

Из формулы (2.1.7) следует, что поле диполя определяется его электрическим моментом  $p_e$ .

Вычислим напряженность поля диполя, используя соотношение (1.11.2). Для этого воспользуемся выражением градиента в полярной системе координат:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left( \frac{\partial\varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta \right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta, \quad (2.1.8)$$

где  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  – орты полярной системы координат.

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^2} \cos \theta \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{r^3} \cos \theta; \quad (2.1.9)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^2} \cos \theta \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \sin \theta. \quad (2.1.10)$$

Так как составляющие  $\vec{E}_r$  и  $\vec{E}_\theta$  взаимно перпендикулярны, то модуль напряженности  $E$  поля диполя находим следующим образом:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \sqrt{\left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \right)^2 (4\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}. \quad (2.1.11)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. *Напряженность и потенциал электростатического поля в точке, лежащей на оси диполя (рис. 2.1.3).*

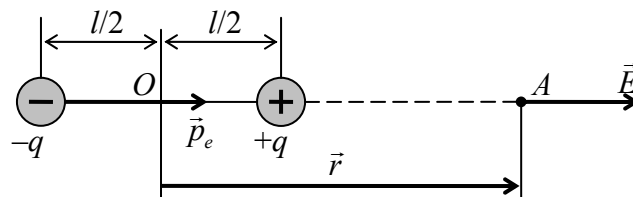


Рис. 2.1.3

В этом случае  $\theta = 0$ . Из формул (2.1.7) и (2.1.11) следует, что

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{r^3} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^2}. \quad (2.1.12)$$

В этом случае напряженность и потенциал поля будут максимальными для выбранного расстояния  $r$ .

2. *Напряженность поля в точке, лежащей на серединном перпендикуляре к оси диполя (рис. 2.1.4).*

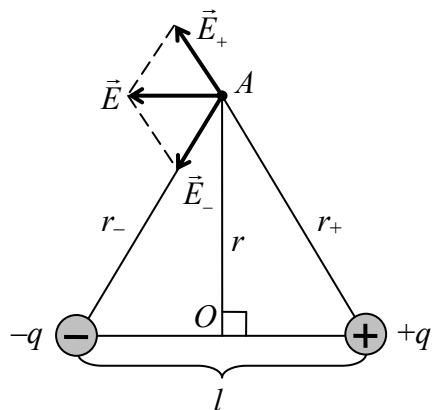


Рис. 2.1.4

В этом случае  $\theta = 90^\circ$ . Из формул (2.1.7) и (2.1.11) следует, что

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \quad \text{и} \quad \varphi = 0. \quad (2.1.13)$$

В этом случае напряженность поля будет минимальной для выбранного расстояния  $r$ .

На рис. 2.1.5 показаны силовые линии (пунктирные линии) и эквипотенциальные поверхности (сплошные линии) поля диполя.

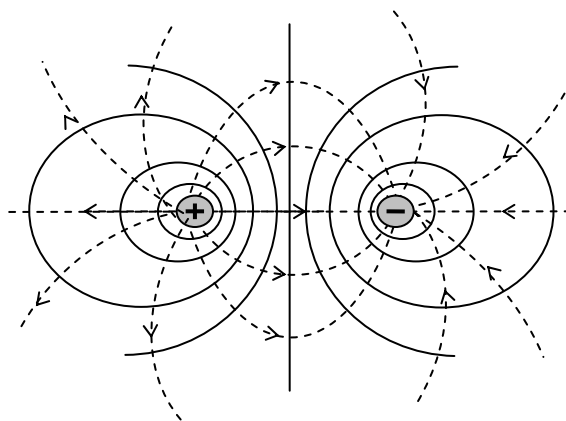


Рис. 2.1.5

Согласно выражению (2.1.13), при угле  $\theta = 90^\circ$  потенциал обращается в нуль для всех точек. Таким образом, все точки плоскости,

перпендикулярной оси диполя и проходящей через его середину, имеют нулевой потенциал.

## 2.2. Диполь во внешних однородном и неоднородном электростатических полях.

Теперь рассмотрим поведение диполя во внешнем электрическом поле. Если диполь поместить в *однородное* электрическое поле, образующие диполь заряды  $+q$  и  $-q$  окажутся под действием равных по величине, но противоположных по направлению сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 2.2.1). Момент пары сил, действующих на диполь, будет равен:

$$M = Fd = Fl\sin\alpha = qEl\sin\alpha = p_e E\sin\alpha, \quad (2.2.1)$$

где  $d = l\sin\alpha$  – момент пары сил.

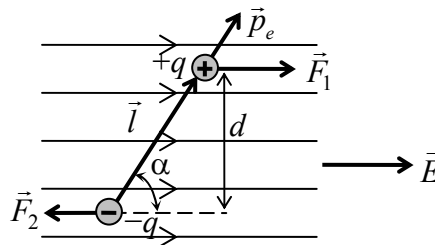


Рис. 2.2.1

Формулу (2.2.1) можно записать в векторном виде:

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}. \quad (2.2.2)$$

Момент сил стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент  $\vec{p}_e$  установился по направлению поля.

Рассмотрим диполь, находящийся в *неоднородном* поле, обладающем симметрией относительно оси  $Ox$ . Пусть центр диполя лежит на этой оси, причем электрический момент диполя образует с осью угол  $\alpha$ , отличный от  $\pi/2$  (рис. 2.2.2). В этом случае силы, действующие на заряды диполя, не одинаковы по величине ( $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$ ). Поэтому, кроме вращательного момента, стремящегося развернуть диполь по направлению внешнего поля, на диполь будет действовать сила, стремящаяся переместить его в направлении оси  $Ox$ , т. е. передвинуть диполь в область поля с большей напряженностью.

Эта сила будет равна:

$$F_x = F_1 - F_2 = qE_+ - qE_- = q(E_+ - E_-), \quad (2.2.3)$$

где  $E_+$  и  $E_-$  – значения напряженности внешнего поля в тех точках, где находятся заряды  $+q$  и  $-q$ .

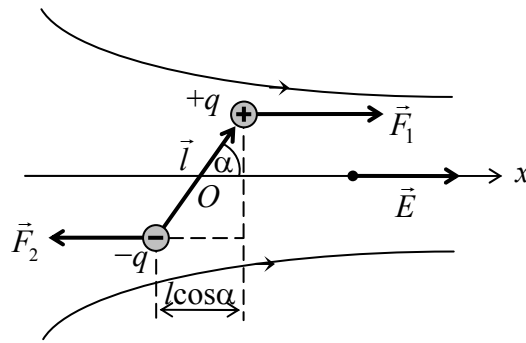


Рис. 2.2.2

Эта сила будет равна:

$$F_x = F_1 - F_2 = qE_+ - qE_- = q(E_+ - E_-), \quad (2.2.3)$$

где  $E_+$  и  $E_-$  – значения напряженности внешнего поля в тех точках, где находятся заряды  $+q$  и  $-q$ .

$$E_+ - E_- = \frac{dE}{dx} \Delta x = \frac{dE}{dx} l \cos \alpha. \quad (2.2.4)$$

Подставим (2.2.4) в выражение (2.2.3) и получим, что сила, втягивающая диполь в область поля с большей напряженностью, равна:

$$F_x = q \frac{dE}{dx} l \cos \alpha = p_e \frac{dE}{dx} \cos \alpha. \quad (2.2.5)$$

Если  $\alpha < 90^\circ$ , то величина  $F_x$  положительна. Это означает, что под действием силы диполь втягивается в область более сильного поля (рис. 2.2.2). При  $\alpha > 90^\circ$  диполь выталкивается из поля.

### 2.3. Энергия диполя во внешнем электростатическом поле.

Найдем потенциальную энергию, которой обладает диполь во внешнем электрическом поле (рис. 2.3.1). Эта энергия будет равна:

$$\Pi = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-), \quad (2.3.1)$$

где  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  – значения потенциалов внешнего поля в точках, где находятся заряды  $+q$  и  $-q$ .

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dx} \Delta x = \frac{d\varphi}{dx} l \cos \alpha. \quad (2.3.2)$$

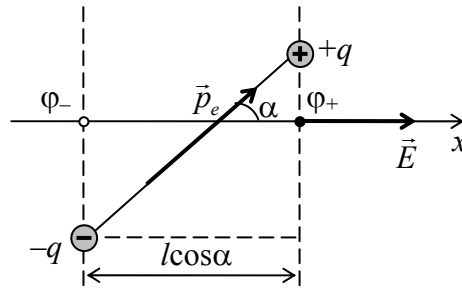


Рис. 2.3.1

Подставив выражение (2.3.2) в выражение (2.3.1) и учитывая, что  $E = -\frac{d\varphi}{dx}$ , получим:

$$\Pi = q \frac{d\varphi}{dx} l \cos \alpha = -qEl \cos \alpha = -p_e E \cos \alpha. \quad (2.3.3)$$

Так как угол  $\alpha$  в формуле (2.3.3) – это угол между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{p}_e$ , то данное выражение можно записать в виде:

$$\Pi = -\vec{p}_e \vec{E}. \quad (2.3.4)$$

Выражение (2.3.4) не учитывает энергию взаимодействия зарядов  $+q$  и  $-q$ , образующих диполь.

#### **2.4. Свободные и связанные заряды в веществе. Типы диэлектриков.**

Вещество (независимо от его природы и агрегатного состояния), помещенное во внешнее электрическое поле, претерпевает определенные изменения. Это приводит к возникновению ряда явлений, которые в свою очередь изменяют поле как внутри этого вещества, так и за его пределами.

По отношению к действию электростатического поля все вещества можно разделить на проводники, полупроводники и диэлектрики. Характерным признаком проводников является наличие в них так называемых свободных носителей заряда (*свободных зарядов*), которыми являются электроны в металлах, ионы в электролитах, электроны и ионы в ионизованных газах и плазме. Под действием электрического поля эти заряды способны перемещаться по проводникам, и поэтому проводники проводят электрический ток. Диэлектрики, состоящие из нейтральных атомов или молекул, практически не содержат свободных носителей заряда, и потому плохо проводят электрический ток



(т. е. в обычных условиях являются изоляторами). Заряды, которые входят в состав нейтральных атомов и молекул, а также заряды ионов в кристаллических диэлектриках с ионной решеткой называют *связанными зарядами*.

Различают *полярные* и *неполярные диэлектрики*, а также *ионно-кристаллические диэлектрики*.

Неполярные диэлектрики ( $N_2$ ,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ ) – вещества, молекулы которых имеют симметричное строение, т. е. центры «сосредоточения» положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают, и дипольный момент этих молекул в этом случае равен нулю. Молекулы таких диэлектриков называются *неполярными*.

Полярные диэлектрики ( $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $SO_2$ ,  $CO$ ) – вещества, молекулы которых имеют асимметричное строение, т. е. центры «сосредоточения» положительных и отрицательных зарядов не совпадают, и эти молекулы обладают дипольным моментом. Молекулы таких диэлектриков называются *полярными*.

Ионно-кристаллические диэлектрики ( $NaCl$ ,  $KCl$ ,  $KBr$ ) – вещества, молекулы которых имеют ионное строение. Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков. В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, а рассматривать их можно как систему двух вставленных одна в другую ионных подрешеток противоположных знаков.

### **2.5. Поляризация диэлектриков, виды поляризации.**

Мы знаем, что диполи, помещенные во внешнее электростатическое поле, стараются расположиться по полю (т. е. так, чтобы момент электрических сил, действующих на них, был равен нулю:  $M = p_e E \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ). Рассмотрим, как ведут себя различные диэлектрики во внешнем электростатическом поле.

*Полярные диэлектрики.* Полярные молекулы имеют дипольный момент  $\vec{p}_e$ . В отсутствие внешнего поля благодаря тепловому движению дипольные моменты расположены беспорядочно. Под действием поля дипольные моменты  $\vec{p}_e$  всех молекул повернутся так, что их оси расположатся приблизительно вдоль направления внешнего поля (рис. 2.5.1).

Однако тепловое движение молекул препятствует строгой ориентации их дипольных моментов. В результате преимущественной

ориентации дипольных моментов молекул вдоль поля на противоположных гранях возникают поляризационные заряды разных знаков, тогда как внутри диэлектрика заряды разных знаков в среднем скомпенсированы. Такого рода поляризация называется *ориентационной* (или *дипольной*) *поляризацией*.

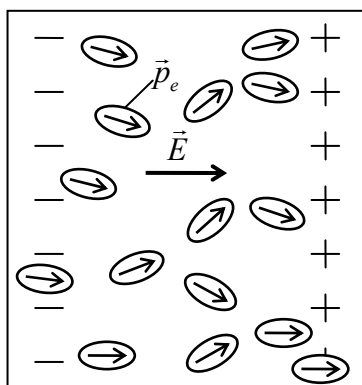


Рис. 2.5.1

*Неполярные диэлектрики.* Если неполярная молекула в отсутствие поля не имеет дипольного момента, то под действием внешнего поля положительное ядро молекулы смещается в направлении электрического поля, а электронные оболочки – в обратном направлении (рис. 2.5.2). Поэтому молекула приобретает дипольный момент  $\vec{p}_e$ , который будет пропорционален напряженности  $E$  внешнего поля. Такие диполи, возникающие при «деформации» атомов и молекул во внешнем поле, называются *квазиупругими диполями*. Их дипольный момент равен:

$$\vec{p}_e = \epsilon_0 \alpha \vec{E}, \quad (2.5.1)$$

где  $\alpha = 4\pi r^3$  – поляризуемость молекулы,  $m^3$ ;  $r$  – радиус молекулы.

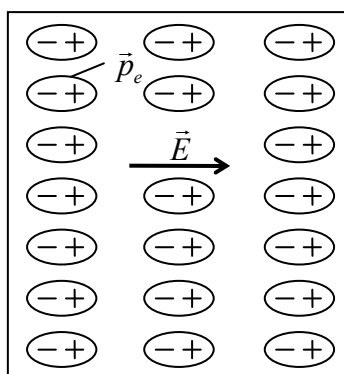


Рис. 2.5.2

В результате на противоположных гранях диэлектрика появятся разноименные поляризационные заряды. Такого рода поляризация называется *электронной поляризацией*.

*Ионно-кристаллические диэлектрики.* В случае ионно-кристаллических диэлектриков положительные ионы кристаллической решетки сместятся в направлении поля, а отрицательные ионы – в противоположном направлении, т. е. их подрешетки как бы сдвинутся относительно друг друга на некоторую величину (рис. 2.5.3). В результате весь образец приобретет результирующий дипольный момент. На противоположных гранях кристалла возникнут нескомпенсированные поляризационные заряды противоположного знака. Такого рода поляризация называется *ионной поляризацией*.

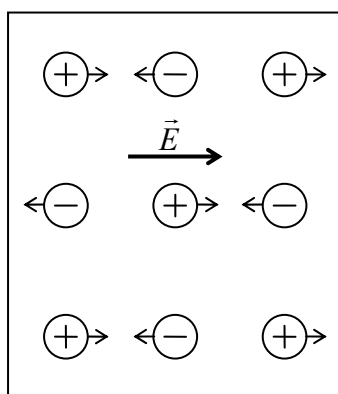


Рис. 2.5.3

Таким образом, с микроскопической точки зрения под *поляризацией* понимают процесс ориентации диполей во внешнем электрическом поле или появление под воздействием внешнего электрического поля ориентированных по полю диполей.

## Лекция № 5

2.6. Диэлектрическая восприимчивость полярных и неполярных диэлектриков.

2.7. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Вектор электрического смещения.

2.8. Диэлектрическая проницаемость среды.

2.9. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред.

### **2.6. Диэлектрическая восприимчивость полярных и неполярных диэлектриков.**

Возникающий во всех случаях дипольный момент образца зависит от числа микрочастиц, находящихся в его объеме. Для характеристики степени поляризации диэлектрика вводят физическую величину – *поляризованность (вектор поляризации)*  $\vec{P}$ . Вектор поляризации – это векторная физическая величина, численно равная дипольному моменту единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_{e_i}}{\Delta V}. \quad (2.6.1)$$

Для большого класса диэлектриков (кроме сегнетоэлектриков) поляризованность  $\vec{P}$  линейно зависит от напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.6.2)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая восприимчивость вещества, которая характеризует свойства диэлектрика. Эта величина безразмерная и всегда положительная ( $\varepsilon > 0$ ).

Рассмотрим *газообразный неполярный диэлектрик*. Молекулы неполярного диэлектрика приобретают во внешнем электрическом поле дипольный момент  $p_e$ , пропорциональный напряженности  $E$  внешнего поля и определяемый формулой (2.5.1).

Концентрация молекул в газообразном неполярном диэлектрике равна  $n$ . Учитывая формулу (2.5.1), для поляризованности неполярного диэлектрика получаем выражение

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_{e_i}}{\Delta V} = \frac{\Delta N \vec{p}_e}{\Delta V} = n \vec{p}_e = n \alpha \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.6.3)$$

где  $\varepsilon = n\alpha$  – диэлектрическая восприимчивость неполярного вещества;  $\alpha$  – поляризуемость неполярной молекулы;  $n = \frac{\Delta N}{\Delta V}$  – концентрация молекул диэлектрика.

В случае *жидких* и *кристаллических неполярных диэлектриков* следует учитывать взаимодействие между атомами и молекулами. В результате зависимость  $\varepsilon$  от  $\alpha$  и  $n$  становится нелинейной, ее можно выразить *формулой Клаузиуса – Моссотти*:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 3} = \frac{1}{3}n\alpha. \quad (2.6.4)$$

Рассмотрим *жидкие* и *газообразные полярные диэлектрики*. В этом случае поляризация осуществляется преимущественно за счет поворота дипольных моментов молекул под действием электрического поля. Процессу ориентирования диполей будет противодействовать дезориентирующее влияние теплового движения молекул, которое в результате их столкновений нарушает упорядоченную ориентировку диполей в направлении поля. Поэтому в расчетах следует учитывать совместное действие этих двух факторов. Теория поляризации полярных диэлектриков создана в 1912 г. Петером Йозефом Вильгельмом Дебаем, который воспользовался методикой расчета намагничивания парамагнетиков, разработанной в 1905 г. французским физиком Полем Ланжевром. Поляризованность для таких диэлектриков равна:

$$\vec{P} = \frac{np_e^2}{3kT} \vec{E}, \quad (2.6.5)$$

где  $p_e$  – дипольный момент полярной молекулы;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура диэлектрика.

Диэлектрическая восприимчивость полярного диэлектрика

$$\varepsilon = \frac{np_e^2}{3\varepsilon_0 kT}. \quad (2.6.6)$$

Диэлектрическая восприимчивость полярного диэлектрика обратна пропорциональна его абсолютной температуре.

## **2.7. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Вектор электрического смещения.**

Рассмотрим плоскопараллельную пластинку из изотропного диэлектрика, помещенную в однородное электростатическое поле. Под действием поля диэлектрик будет поляризоваться. Выделим в поляризованном

диэлектрике элементарный объем  $\Delta V$  в виде наклонной призмы, основания которой выходят на поверхности диэлектрической пластинки (рис. 2.7.1).

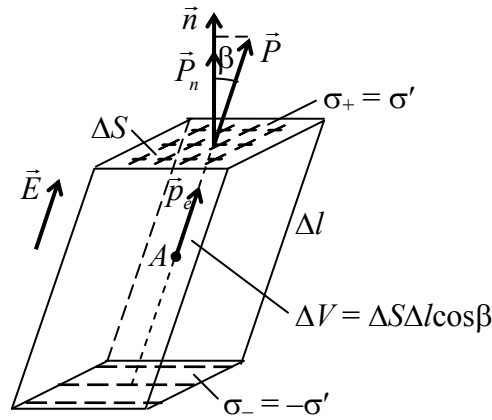


Рис. 2.7.1

С одной стороны, дипольный момент  $p_e$  выделенного элементарного объема равен произведению поляризованности  $P$  на величину его объема:

$$p_e = \sum_{i=1}^N p_{e_i} = P \Delta V = P \Delta S \Delta l \cos \beta. \quad (2.7.1)$$

С другой стороны, поверхностные заряды на основаниях призмы образуют электрический диполь. Его дипольный момент равен:

$$p_e = q'l = \sigma' \Delta S \Delta l. \quad (2.7.2)$$

Сравнив формулы (2.7.1) и (2.7.2), получим:

$$P \Delta S \Delta l \cos \beta = \sigma' \Delta S \Delta l \Rightarrow P \cos \beta = \sigma' \Rightarrow P_n = \sigma', \quad (2.7.3)$$

т. е. *поверхностная плотность связанных зарядов некоторой элементарной площадки равна нормальной составляющей вектора поляризации.*

Формула (2.7.3) показывает, что нормальная составляющая  $P_n$  представляет по величине количество электричества, смещаемое при поляризации через единичную площадку в направлении нормали  $\vec{n}$  к ней. Эта интерпретация применима и в случае неоднородной поляризации, когда вектор  $\vec{P}$  меняется от точки к точке. В этом случае диэлектрик можно разделить на малые объемы, в пределах каждого из которых поляризация может считаться однородной.

Внутри диэлектрика на внешнее электрическое поле  $\vec{E}_0$  накладывается дополнительное электрическое поле  $\vec{E}'$  связанных зарядов.

Определим значение избыточного связанного заряда, который возникает при поляризации диэлектрика внутри произвольной заданной замкнутой поверхности  $S$  (см. рис. 2.7.2).

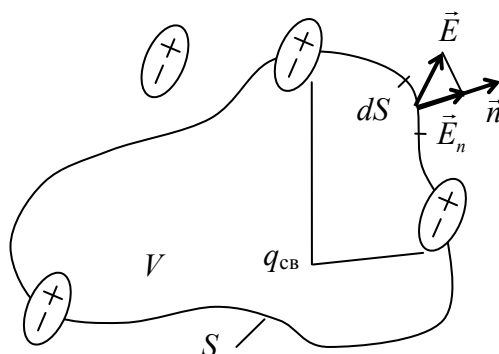


Рис. 2.7.2

Под действием электрического поля связанные заряды молекул, находящихся вблизи поверхности  $S$ , сместятся так, что их положительные и отрицательные заряды будут находиться по разные стороны поверхности  $S$ . Заряд  $dq'$ , смещенный при поляризации через площадку  $dS$  в направлении нормали, согласно формуле (2.7.3) равен  $P_n dS$ . Через всю поверхность  $S$  в направлении нормали  $\vec{n}$  будет смещаться заряд

$$q' = \oint_S dq' = \oint_S P_n dS. \quad (2.7.4)$$

В результате объем  $V$  диэлектрика, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ , приобретет *избыточный связанный заряд*, равный по значению и противоположный по знаку наружному поверхностному заряду:

$$q_{\text{св}} = -q' = -\oint_S P_n dS = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (2.7.5)$$

Применим теорему Гаусса (1.5.5) к замкнутой поверхности  $S$ , добавив при этом к свободным зарядам  $q$  избыточный связанный заряд  $q_{\text{св}}$ :

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \frac{q + q_{\text{св}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = q - \oint_S \vec{P} d\vec{S} \Rightarrow \\ \Rightarrow \oint_S \vec{P} d\vec{S} + \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= q \Rightarrow \oint_S (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) d\vec{S} = q. \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

Величину  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  назвали *вектором электрического смещения* (единица измерения в системе СИ  $[D] = \text{Кл/м}^2$ ). Вектором электрического смещения  $\vec{D}$  описывается электрическое поле, создаваемое свободными зарядами. Поле вектора электрического смещения изображается с помощью линий электрического смещения, направление и густота которых определяются точно так же, как и для линий напряженности. Если линии вектора напряженности могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах – свободных и связанных, то линии вектора электрического смещения начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах.

Из выражения (2.7.6) следует:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q, \quad \text{или} \quad \oint_S D_n dS = q. \quad (2.7.7)$$

Выражение (2.7.7) является *теоремой Гаусса для электростатического поля в диэлектрике*: поток вектора смещения электрического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов.

Если правую часть теоремы Гаусса для электростатического поля в диэлектрике (2.7.7) выразить через объемную плотность  $\rho$  заряда ( $q = \int_V \rho dV$ ) и применить к выражению  $\oint_S D_n dS$  теорему Остроградского – Гаусса, то получим:

$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV \Rightarrow \text{div} \vec{D} = \rho. \quad (2.7.8)$$

Уравнение (2.7.8) называется *теоремой Гаусса для электростатического поля в диэлектрике в дифференциальной форме*.

### **2.8. Диэлектрическая проницаемость среды.**

Определим напряженность поля внутри диэлектрика. Рассмотрим однородное внешнее поле  $\vec{E}_0$ , в котором находится пластинка из однородного диэлектрика (рис. 2.8.1).

Под действием поля диэлектрик поляризуется, т. е. происходит смещение зарядов: положительные – по полю, отрицательные – против поля. В результате на правой границе диэлектрика, обращенного к отрицательной плоскости, будет избыток положительного заряда с поверхностной плотностью  $+\sigma'$ , на левой – отрицательного заряда с поверхностной плотностью  $-\sigma'$ . Эти заряженные поверхности обра-



зуют поле, напряженность  $\vec{E}'$  которого направлена противоположно внешнему полю. Поэтому результирующее электростатическое поле внутри диэлектрика уменьшается:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \Rightarrow E = E_0 - E' < E_0. \quad (2.8.1)$$

Следовательно, поляризация диэлектрика вызывает в нем уменьшение поля по сравнению с первоначальным внешним полем.

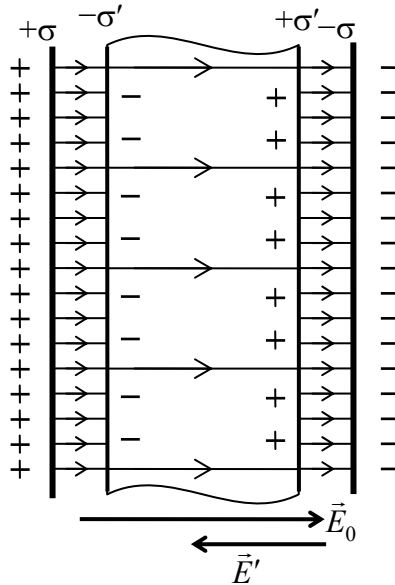


Рис. 2.8.1

Ослабление поля внутри диэлектрика означает, что часть силовых линий, которые начинаются на положительных свободных зарядах, заканчивается на отрицательно заряженной поверхности диэлектрика, а затем восстанавливается на положительных зарядах противоположной поверхности диэлектрика и заканчивается на отрицательных свободных зарядах. Найдем напряженность поля внутри диэлектрика. Так как поле создано двумя бесконечно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью зарядов  $+\sigma'$  и  $-\sigma'$ , то

$$E' = E'_+ + E'_- = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \quad (2.8.2)$$

Учитывая выражение (2.7.3), получим:

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P_n}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}. \quad (2.8.3)$$

Тогда напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна:

$$\begin{aligned} E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\varkappa \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} &\Rightarrow E = E_0 - \varkappa E \Rightarrow E(1 + \varkappa) = E_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow E = \frac{E_0}{1 + \varkappa} &\Rightarrow \frac{E_0}{E} = 1 + \varkappa = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 1 + \varkappa, \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды.

Диэлектрическая проницаемость вещества  $\varepsilon$  – это физическая величина, которая показывает, во сколько раз напряженность электрического поля в диэлектрике меньше напряженности электрического поля в вакууме.

С учетом (2.8.4) вектор электрического смещения равен:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varkappa \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \varkappa) \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (2.8.5)$$

Получили формулу взаимосвязи векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ .

С учетом диэлектрических свойств среды можно записать:

– закон Кулона для двух точечных зарядов, находящихся в диэлектрике:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}; \quad (2.8.6)$$

– напряженность поля точечного заряда, находящегося в диэлектрике:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q|}{\varepsilon r^2}; \quad (2.8.7)$$

– потенциал поля точечного заряда, находящегося в диэлектрике:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r}. \quad (2.8.8)$$

Используя формулы (2.8.7), (2.8.8), принцип суперпозиции электрических полей и принцип суперпозиции потенциалов, можно вычислить напряженность и потенциал поля любой системы зарядов, находящейся в диэлектрике.

### 2.9. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред.

С помощью теоремы о циркуляции вектора напряженности  $\vec{E}$  и теоремы Гаусса для вектора электрического смещения  $\vec{D}$  получим

условия, устанавливающие взаимосвязь между характеристиками электростатического поля на границе двух диэлектриков.

Применим теорему о циркуляции вектора напряженности  $\vec{E}$  по замкнутому контуру  $L$ , который вытянут вдоль границы раздела диэлектриков (рис. 2.9.1). Будем стягивать этот контур к границе так, чтобы длина его участков, пересекающих границу, стремилась к нулю.

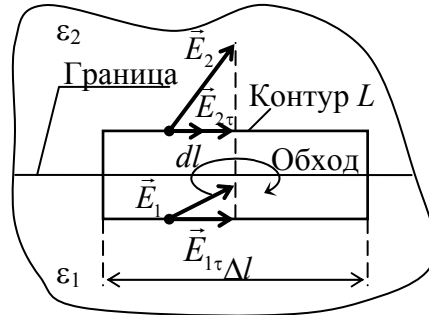


Рис. 2.9.1

В этом предельном случае вклад в циркуляцию будут вносить только те участки контура, которые параллельны границе. Тогда получим:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow E_{\tau 2} \Delta l - E_{\tau 1} \Delta l = 0 \Rightarrow E_{\tau 2} = E_{\tau 1}. \quad (2.9.1)$$

С учетом формулы (5.20) имеем:

$$E_{\tau 2} = E_{\tau 1} \Rightarrow \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} = \frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \Rightarrow \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1}. \quad (2.9.2)$$

Теперь запишем теорему Гаусса для замкнутой поверхности  $S$  в виде короткого цилиндра (рис. 2.9.2).

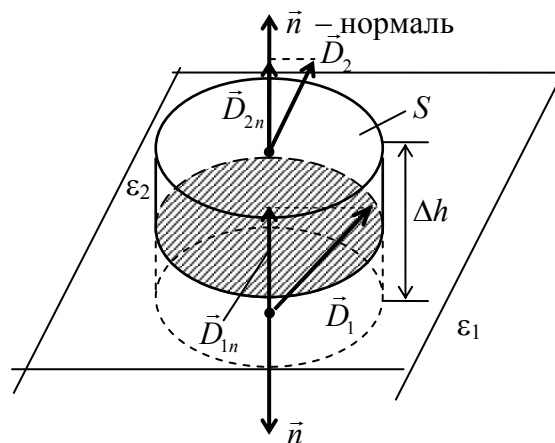


Рис. 2.9.2

При уменьшении высоты цилиндра ( $\Delta h \rightarrow 0$ ) поток вектора электрического смещения  $\vec{D}$  через замкнутую поверхность  $S$  будет определяться только потоком через верхнее и нижнее основания цилиндра.

При отсутствии свободных зарядов на границе диэлектриков ( $q = 0$ ) получим:

$$\begin{aligned} \oint_S D_n dS = q &\Rightarrow \oint_S D_n dS = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow D_{2n}S - D_{1n}S = 0 \Rightarrow D_{2n} = D_{1n}. \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

С учетом формулы (5.20) имеем:

$$\begin{aligned} D_{2n} = D_{1n} &\Rightarrow \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2n} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}. \end{aligned} \quad (2.9.4)$$

Таким образом, на границе двух диэлектриков выполняются соотношения (2.9.1)–(2.9.4).

Резюмируя, можно сказать, что при переходе через границу раздела двух диэлектриков нормальная составляющая вектора электрического смещения  $D_n$  и тангенциальная составляющая вектора напряженности  $E_\tau$  изменяются непрерывно. Тангенциальная же составляющая вектора электрического смещения  $D_\tau$  и нормальная составляющая вектора напряженности  $E_n$  при переходе через границу раздела претерпевают разрыв.

Заметим, что при наличии свободных зарядов на границе раздела

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (2.9.5)$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность свободных зарядов.

Используя граничные условия (2.9.1)–(2.9.4) для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ , получим закон преломления линий вектора электрического смещения  $\vec{D}$  (линий вектора напряженности  $\vec{E}$ ).

Из рис. 2.9.3 видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}. \quad (2.9.6)$$

С учетом формул (2.9.1) и (2.9.3) получаем:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} \frac{D_{1n}}{D_{1\tau}} = \frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (2.9.7)$$

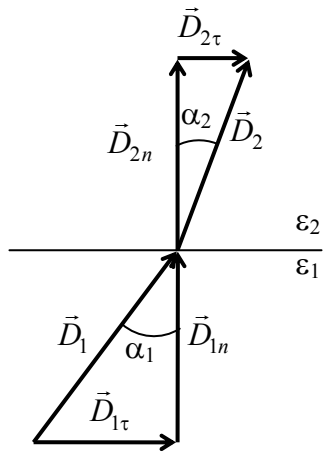


Рис. 2.9.7

Соотношение (2.9.7) выражает закон преломления линий электрического смещения на границе раздела двух диэлектриков.

## Лекция № 6

2.10. Сегнетоэлектрики. Диэлектрический гистерезис. Температура Кюри.

2.11. Эффекты, наблюдаемые в сегнетоэлектриках и других диэлектриках. Применение сегнетоэлектриков в науке и технике.

### ***2.10. Сегнетоэлектрики. Диэлектрический гистерезис. Температура Кюри.***

Существует группа кристаллических диэлектриков, для которых характерно резкое повышение диэлектрической проницаемости в некоторой области температур. Впервые такое поведение вещества в электрическом поле было обнаружено Игорем Васильевичем Курчатовым и его сотрудниками при изучении свойств сегнетовой соли (двойная натрий-калиевая соль винной кислоты  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ). Это и послужило в дальнейшем основанием для выделения специального класса диэлектриков – сегнетоэлектриков. В настоящее время известно несколько сотен соединений, обладающих сегнетоэлектрическими свойствами. Группу сегнетоэлектрических материалов существенно расширяют и дополняют твердые растворы на основе различных соединений. Подобные растворы часто отличаются по своим свойствам от их ингредиентов. Сегнетоэлектрическими свойствами обладают кристаллы некоторых фосфатов и арсенатов, нитратов и солей глицина и бетаина, нитритов, двойных и сложных окислов, других соединений, содержащих почти все элементы таблицы Менделеева. К этому классу веществ относятся, например, титанат бария  $\text{BaTiO}_3$ , дигидроортофосфат калия  $\text{KN}_2\text{PO}_4$ , титанат свинца  $\text{PbTiO}_3$ , ниобат калия  $\text{KNbO}_3$  и др. Сегнетоэлектрические кристаллы характеризуются многообразием структурных типов и химического состава, что свидетельствует о различии молекулярных механизмов возникновения спонтанной поляризации.

Сегнетоэлектрики отличаются от остальных диэлектриков рядом характерных особенностей.

1. В то время как у обычных диэлектриков значение диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  составляет несколько единиц, достигая в виде исключения нескольких десятков (у воды, например,  $\epsilon = 81$ ), диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков бывает порядка нескольких тысяч. Например, для титаната бария  $\epsilon \approx 2000$  (при  $t = 120^\circ\text{C}$ ) и  $\epsilon = 6000\text{--}7000$  (при  $t = 80^\circ\text{C}$ ).

2. Для сегнетоэлектриков отсутствует линейная зависимость между вектором поляризации  $\vec{P}$  и вектором напряженности  $\vec{E}$  электриче-

ского поля. Следовательно, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  (и диэлектрическая восприимчивость  $\epsilon_0$ ) сегнетоэлектриков оказывается зависящей от напряженности поля (рис. 2.10.1). Для остальных диэлектриков величина  $\epsilon$  (и  $\epsilon_0$ ) не зависит от напряженности  $E$  поля.

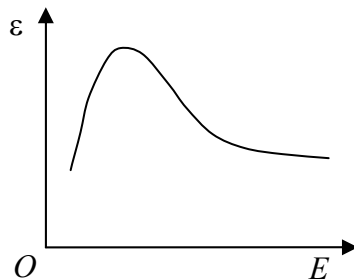


Рис. 2.10.1

3. Для сегнетоэлектриков характерно явление диэлектрического гистерезиса (от греч. *hysteresis* – запаздывание). При изменении поля значения поляризованности  $P$  (или электрического смещения  $D$ ) сегнетоэлектрика отстают от напряженности внешнего электрического поля  $E$ , в результате чего  $P$  (и  $D$ ) определяются не только величиной  $E$  в данный момент, но и предшествующими значениями, т. е. зависят от предыстории диэлектрика (от его предшествующих состояний поляризации). При циклических изменениях поля зависимость  $P$  от  $E$  изображается кривой (рис. 2.10.2), называемой *петлей гистерезиса*.

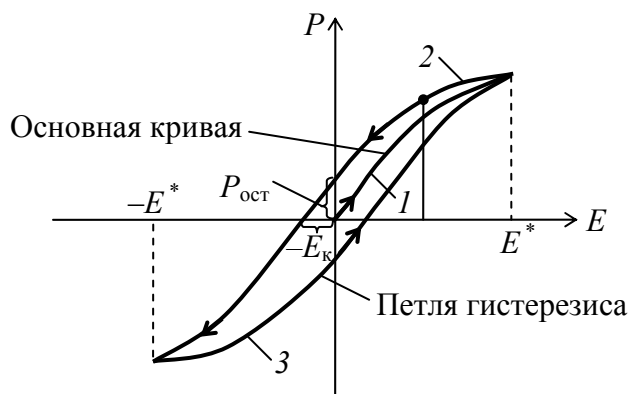


Рис. 2.10.2

При повышении напряженности  $E$  увеличение поляризованности  $P$  определяется кривой  $1$ , которая нелинейна. Если затем уменьшать  $E$ , то имеет место «запаздывание» в уменьшении поляризованности  $P$  (кривая  $2$ ). При  $E = 0$  поляризованность  $P = P_{\text{ост}}$  (остаточная поляризация).

Для снятия остаточной поляризации нужно создать электрическое поле противоположного направления ( $E = -E_k$  – коэрцитивная сила, от лат. *coercitio* – удерживание). Дальнейшее уменьшение значения напряженности приводит к возникновению поляризации противоположного направления, а последующее уменьшение модуля  $E$  вновь характеризуется «запаздыванием» в изменении значения  $P$  (кривая 3). В результате периодического изменения электрического поля  $E$  (от  $-E^*$  до  $E^*$ ) кривые 2, 3 для поляризованности  $P$  образуют характерную петлю гистерезиса. Кривая 1 называется *основной кривой поляризации сегнетоэлектрика*.

4. Сегнетоэлектрические свойства сильно зависят от температуры. При температурах, превышающих определенное значение  $T_k$ , различное для разных веществ, эти свойства исчезают. При достижении этой температуры имеет место превращение сегнетоэлектрика (фазовый переход) в обычный полярный диэлектрик. Указанная температура называется *температурой* (или *точкой*) *Кюри* (в честь французского физика Пьера Кюри). Например, для титаната бария точка Кюри лежит около  $80^\circ\text{C}$ , а для сегнетовой соли существуют две точки Кюри:  $+22,5$  и  $-15^\circ\text{C}$ , и сегнетоэлектрические свойства наблюдаются только при температурах, лежащих между этими точками.

5. Экспериментальные и теоретические исследования показали, что поляризация сегнетоэлектриков является следствием взаимодействия всех молекул сегнетоэлектрика, в связи с чем диполи элементарных ячеек кристалла выстраиваются в определенном направлении под действием внутреннего электрического поля, созданного соседними молекулами сегнетоэлектрика. При этом образуются самопроизвольно поляризованные области – домены, в пределах которых все диполи ориентированы в одном направлении. Эта спонтанная (самопроизвольная) поляризация соответствует минимуму энергии домена.

При отсутствии внешнего поля дипольные моменты доменов расположены хаотически, и макроскопический образец сегнетоэлектрика неполяризован ( $P = 0$ ). Если такой сегнетоэлектрик поместить во все возрастающее по модулю внешнее электрическое поле  $E$ , то происходит переориентация доменов, отмечается преимущественное увеличение тех доменов, дипольные моменты которых ориентированы в направлении поля  $E$ , а также уменьшаются размеры доменов с противоположной ориентацией дипольных моментов. В сильных полях наступает явление насыщения, и весь образец представляет собой один макродомен (рис. 2.10.3).



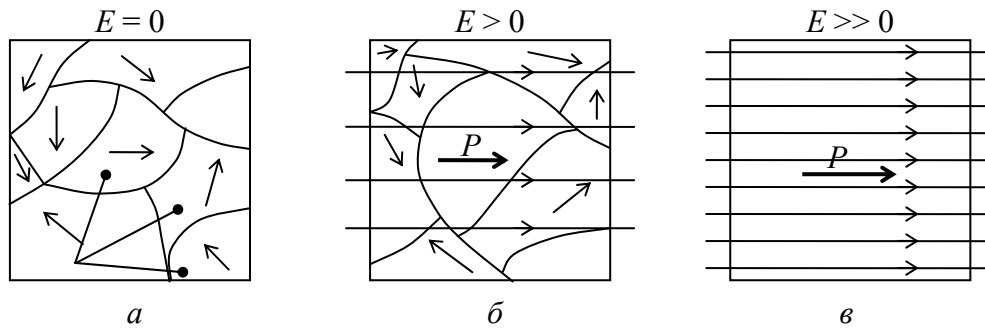


Рис. 2.10.3

При температуре  $T > T_k$  доменная структура разрушается.

### 2.11. Эффекты, наблюдаемые в сегнетоэлектриках и других диэлектриках. Применение сегнетоэлектриков в науке и технике.

**Пьезоэлектрический эффект** (от греч. *piezo* – давлению). Опыты, проведенные в 1880 г. братьями Пьером и Жаком Кюри, показали, что при механических деформациях (сжатии или растяжении) некоторых кристаллов (кварц, турмалин, сегнетовая соль, титанат бария, цинковая обманка и др.) в определенных направлениях на их гранях появляются электрические заряды противоположных знаков. Они создают электрическое поле, напряженность  $E$  которого зависит от давления ( $E \sim p$ ), т. е. механического напряжения. Пьезоэлектрический эффект в кварце наблюдается вдоль электрических осей кристалла, перпендикулярных его оптической оси. Обращение направления деформации кристалла изменяет знаки зарядов на поверхностях на противоположные. *Прямой пьезоэлектрический эффект* используется для измерения механических напряжений, возникающих в деформированных материалах (*пьезодатчики*).

Реализуется и *обратный пьезоэлектрический эффект*, который заключается в изменении линейных размеров некоторых кристаллов под действием электрического поля. Изменение направления электрического поля вызывает изменение характера деформаций на противоположный. В случае переменного электрического поля грани пластинки вибрируют, следовательно, они являются источником звуковых волн. Обратный пьезоэлектрический эффект используется при создании пьезоэлектрических генераторов ультразвука.

Рассмотрим более подробно некоторые примеры практического применения пьезоэффекта.

- Пьезоэлектрическая зажигалка – самый распространенный пример использования прямого пьезоэффекта. Если разобрать кухонную зажигалку, то можно увидеть, что искра, поджигающая газ, появляется в ней

при деформации незамкнутой петли из упругого пьезоэлектрика. Расстояние между электродами такой зажигалки около 5 мм. Если учесть, что электрический пробой в воздухе возникает при напряженности поля около 2 МВ/м, то, значит, в вашей кухонной зажигалке при деформации пьезоэлектрика возникает напряжение как минимум 10 000 В.

- Американские изобретатели Дж. Броз и В. Лаубердорфер разработали конструкцию подшипника, в котором трение уничтожается вибрацией, но для ее создания не требуется специальных механизмов. Втулки подшипника изготавливаются из пьезоэлектрического материала. Ток заставляет пьезоэлектрик сжиматься и расширяться, создавая вибрацию, уничтожающую трение.

- Установка пьезопреобразователей на реактивных самолетах позволяет экономить почти треть топлива, которое шло на выработку электроэнергии, следовательно, позволяет увеличить дальность полета. Здесь в электроэнергию превращаются колебания и вибрация фюзеляжа и крыльев.

- Фирма «Филипс» успешно разрабатывает идею пьезоэлектрического привода для механизмов малой мощности. В частности, ею создан светофор, батареи которого заряжаются от шума автомобилей на перекрестке.

*Электрострикционный эффект.* При внесении диэлектриков во внешнее неоднородное электрическое поле изменяются форма и объем образца (деформация). Это явление называется *электрострикцией* (от электро- и лат. *strictio* – стягивание, сжатие). Следует отметить, что электрострикция имеет место во всех диэлектриках, помещенных в неоднородное электрическое поле, тогда как обратный пьезоэлектрический эффект наблюдается только в некоторых кристаллах, помещенных в однородное электрическое поле. Пьезоэффект пропорционален напряженности  $E$ , а электрострикция пропорциональна квадрату напряженности  $E^2$ . Поэтому электрострикционные силы не меняют своего направления при изменении направления электрического поля. Обратный пьезоэффект изменяет свое направление при изменении направления поля.

Сегнетоэлектрические материалы (монокристаллы, керамика, пленки) широко применяются в технике и в научном эксперименте. Благодаря большим значениям диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  их используют в качестве материала для конденсаторов высокой удельной емкости. Большие значения пьезоэлектрических констант обуславливают применение сегнетоэлектриков в качестве *пьезоэлектрических материалов* в приемниках и излучателях ультразвука, в преобразовате-

лях звуковых сигналов в электрические и наоборот, в датчиках давления и др. Резкое изменение сопротивления вблизи температуры фазового перехода в некоторых сегнетоэлектриках используется в позисторах для контроля и измерения температуры. Сильная температурная зависимость спонтанной поляризации (большая величина пьроэлектрической константы) позволяет применять сегнетоэлектрики в приемниках электромагнитных излучений переменной интенсивности в широком диапазоне длин волн (от видимого до субмиллиметрового). Благодаря сильной зависимости диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  от напряженности  $E$  электрического поля сегнетоэлектрики используют в нелинейных конденсаторах (варикондах), которые нашли применение в системах автоматики, контроля и управления. Зависимость показателя преломления от поля обуславливает использование сегнетоэлектриков в качестве электрооптических материалов. Во внешнем электрическом поле изменяются преломляющие свойства сегнетоэлектрических кристаллов (компоненты тензора показателя преломления). Это явление используется для управления световыми пучками, в оптических затворах, модуляторах и умножителях частоты лазерного излучения. Ниобат лития  $\text{LiNbO}_3$ , обладающий большими электрооптическими коэффициентами, является одним из лучших материалов для интегральных оптических модуляторов. Кристалл  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  широко применяется для удвоения оптической частоты лазера. Из триглицинсульфата изготавливаются фотоприемники для инфракрасной области спектра.

Вариконды предназначены для управления параметрами электрических цепей за счет изменения их емкости при воздействии как постоянного или переменного напряжений, так и нескольких напряжений, приложенных одновременно и различающихся по значению и частоте. Вариконды являются нелинейными конденсаторами и по своему функциональному действию аналогичны варикапам. Основными сегнетоэлектрическими материалами, используемыми для изготовления варикондов, являются твердые растворы, например, систем  $\text{Ba}(\text{Ti}, \text{Sn})\text{O}_3$  или  $\text{Pb}(\text{Ti}, \text{Zr}, \text{Sn})\text{O}_3$ . Одна из основных характеристик варикондов – коэффициент нелинейности, равный отношению максимального значения диэлектрической проницаемости при некоторой максимальной для данного материала напряженности электрического поля к начальному значению диэлектрической проницаемости. Значения коэффициента нелинейности могут изменяться от 4 до 50 (в переменном поле). С увеличением приложенного напряжения диэлектрическая проницаемость, а следовательно, и электрическая емкость вариконда возрастают, достигают максимума и затем снижаются. Степень нелинейности и емкость

варикондов сильно зависят от температуры. В простейшем случае вариконды работают под воздействием переменного синусоидального поля и постоянного электрического поля, причем напряженность постоянного поля значительно превышает напряженность переменного поля. Чем сильнее приложенное к сегнетоэлектрику постоянное поле, тем меньшее влияние на суммарную электрическую индукцию в сегнетоэлектрике оказывает переменное поле.

Вариконды имеют номинальные значения емкостей (при напряжении 5 В и частоте 50 Гц) от 10 до 100 000 пФ. Вариконды характеризуются высокой механической прочностью, устойчивостью к вибрациям, тряске, влаге; срок их службы практически неограничен. В серийном производстве вариконды изготавливают либо в виде одиночных дисков, либо в виде дисков, собранных в цилиндр, с номинальными значениями емкости от 10 пФ до 0,22 мкФ. Особенности варикондов – временная и температурная нестабильность емкости, ограниченный диапазон рабочих частот и температур, высокие значения диэлектрических потерь.

Высокие нелинейные свойства позволяют использовать вариконды для стабилизации тока и напряжения, умножения частоты, для автоматического бесконтактного дистанционного управления, преобразования синусоидального напряжения в импульсное, усиления электрической мощности и т. д.

К линейным электрооптическим материалам относятся материалы, в которых наблюдается линейная зависимость диэлектрической проницаемости и коэффициента преломления от величины приложенного напряжения. Такими материалами являются кристаллы, не имеющие центра симметрии, – пьезоэлектрические и сегнетоэлектрические материалы. Среди кубических линейных электрооптических кристаллов наиболее многочисленными являются кристаллы со структурой цинковой обманки ( $ZnS$ ,  $ZnSe$ ,  $ZnTe$ ).

Квадратичным электрооптическим эффектом обладают кристаллы, имеющие центр симметрии, а также изотропные среды (некоторые жидкости, такие как нитробензол, сероуглерод). Среди материалов с квадратичным электрооптическим эффектом наибольшее применение имеют кристаллы группы дигидроортофосфата калия  $KH_2PO_4$ , кристаллы группы перовскитов (титанат бария  $BaTiO_3$  и твердые растворы на его основе). На базе кристаллов ниобата лития  $LiNbO_3$ , дигидроортофосфата калия  $KH_2PO_4$ , его дейтерированного аналога созданы разнообразные конструкции электрооптических модуляторов.

## Тема 3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДНИКАХ

### Лекция № 6 (продолжение)

#### 3.1. Поле внутри проводника и вблизи его поверхности.

##### **3.1. Поле внутри проводника и вблизи его поверхности.**

В проводниках, к которым относятся металлы, жидкости и газы, имеются электрически заряженные частицы, способные под действием внешнего поля перемещаться по всему объему проводника. В металлах это электроны, называемые свободными электронами (или электронами проводимости), которые свободно перемещаются между узлами кристаллической решетки, образованной ионами металла. В отсутствие внешнего поля электрические поля свободных электронов и положительных ионов металла взаимно компенсируют друг друга. В проводнике, внесенном в электрическое поле, происходит перераспределение свободных зарядов, в результате чего на поверхности проводника возникают нескомпенсированные положительные и отрицательные заряды (рис. 3.1.1). Перераспределение зарядов в проводнике происходит до тех пор, пока всюду внутри проводника поле электронов и положительных ионов  $E'$  не скомпенсирует внешнее поле  $E_0$  и в любой точке внутри проводника, находящегося в электростатическом поле, напряженность установившегося результирующего электрического поля  $E$  не будет равна нулю. Этот процесс называют *электростатической индукцией*, а появившиеся на поверхности проводника заряды – *индукционными зарядами*.

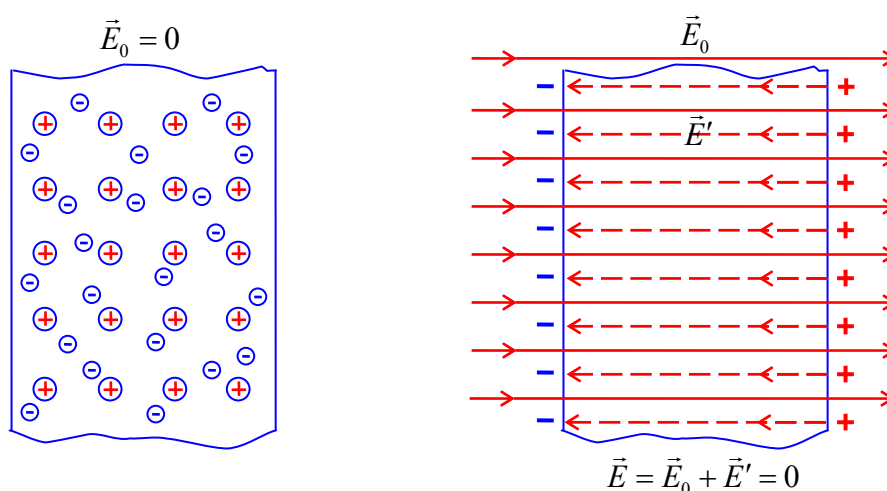


Рис. 3.1.1

Силловые линии электростатического поля вне проводника в непосредственной близости к нему перпендикулярны его поверхности. Если бы это было не так, то имела бы составляющая напряженности  $\vec{E}_\tau$  поля вдоль поверхности проводника, и по поверхности протекал бы ток. При равновесии зарядов во всех точках внутри проводника не только напряженность поля, но и заряд равен нулю. Во всех точках на поверхности проводника  $\vec{E} = \vec{E}_n$  ( $\vec{E}_\tau = 0$ ). Потенциалы во всех точках внутри проводника одинаковы и равны потенциалу на поверхности проводника ( $E = -\frac{d\varphi}{dr} = 0 \rightarrow \varphi = \text{const}$ ). Таким образом, поверхность проводника, находящегося в электростатическом поле, эквипотенциальна ( $\frac{d\varphi}{dl} = -E_\tau = 0$ ), весь объем проводника также эквипотенциален.

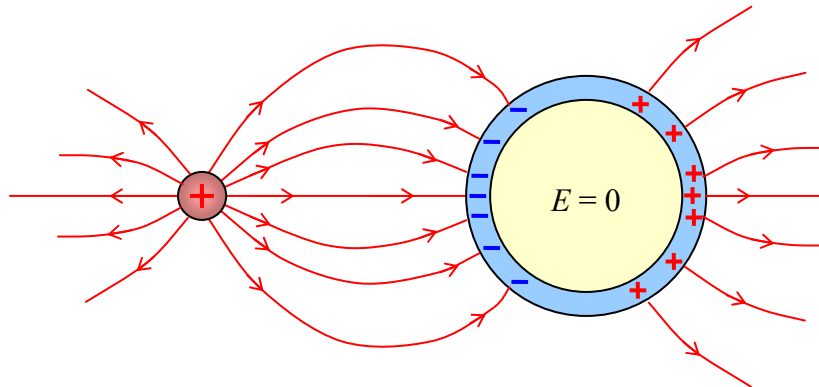


Рис. 3.1.2

Все внутренние области проводника, внесенного в электрическое поле, остаются электронейтральными, т. к. в заряженном проводнике индуцированные заряды распределяются всегда на его внешней поверхности. Если удалить некоторый объем, выделенный внутри проводника, и образовать пустую полость, то электрическое поле внутри полости будет равно нулю (рис. 3.1.2). На этом основана *электростатическая защита*: чувствительные к электрическому полю приборы для исключения влияния поля помещают в металлические ящики (в проводящий экран), которые соединяют с землей.

Замкнутая проводящая незаземленная оболочка не экранирует внешнее от поля зарядов, находящихся внутри оболочки, пространство. Электрический заряд внутри замкнутой сферической проводящей оболочки создает на ее внутренней и внешней поверхностях равные

по величине и противоположные по знаку индуцированные заряды (рис. 3.1.3, а).

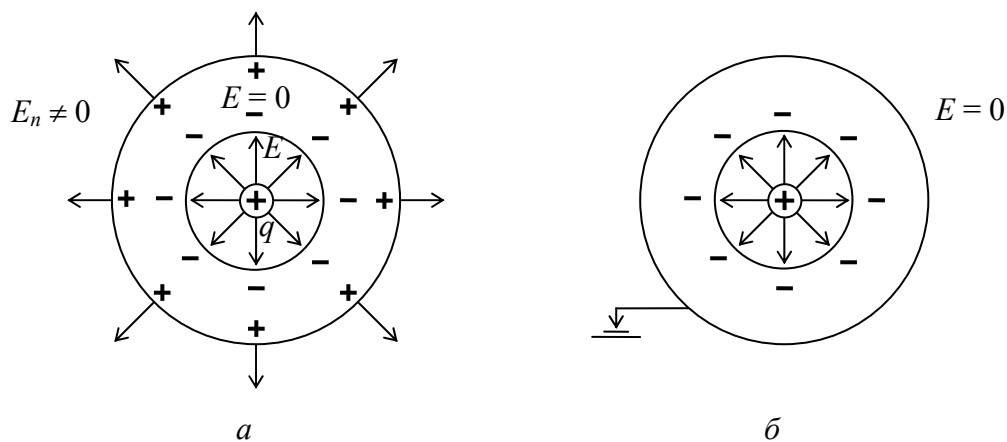


Рис. 3.1.3

Эффект экранировки имеется только в толще сферической оболочки ( $\vec{E} = 0$ ). Во внешнем пространстве поле создается электрическими зарядами, индуцированными на ее наружной поверхности. Эффект экранировки внешнего от поля заряда, находящегося внутри проводящей сферической оболочки, пространства возникает, если убрать ее индуцированные заряды заземлением наружной поверхности оболочки (рис. 3.1.3, б).

## Тема 4. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

### Лекция № 7

- 4.1. Электроемкость уединенного проводника и конденсатора.
- 4.2. Конденсаторы и их соединения.
- 4.3. Энергия системы зарядов, проводника и конденсатора. Объемная плотность энергии электрического поля.

#### **4.1. Электроемкость уединенного проводника и конденсатора.**

*Уединенный проводник* – это проводник, удаленный от других проводников, тел и зарядов. Если сообщить такому проводнику некоторый заряд, то он распределится по его поверхности так, что напряженность поля внутри проводника будет равна нулю. Такое распределение является единственным. Различные по величине заряды распределяются на уединенном проводнике таким образом, что отношение плотностей заряда в двух произвольных точках поверхности проводника при любой величине заряда будет одним и тем же. Следовательно, потенциал  $\varphi$  уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду  $q$ :

$$q = C\varphi \Rightarrow C = \frac{q}{\varphi}. \quad (4.1.1)$$

Коэффициент пропорциональности между потенциалом и зарядом называется *электроемкостью* (или просто *емкостью*) проводника. Электроемкость проводника численно равна отношению заряда  $q$  уединенного проводника к его потенциалу  $\varphi$ .

Электроемкость уединенного проводника зависит от его формы и размеров, а также от диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  окружающей среды. Электроемкость уединенного проводника не зависит от материала, формы и размеров полостей внутри проводника, а также от агрегатного состояния, заряда и потенциала.

За единицу емкости 1 Ф (фарад) принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл (1 Ф = 1 Кл/В). Электроемкость в 1 Ф очень велика. Поэтому на практике пользуются дольными единицами: 1 мкФ =  $10^{-6}$  Ф; 1 нФ =  $10^{-9}$  Ф; 1 пФ =  $10^{-12}$  Ф.

Примером уединенного проводника является проводящий шар. Выведем формулу для емкости уединенного проводящего шара ра-



диусом  $R$ , несущего заряд  $q$  и находящегося в однородной безграничной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Для этого используем взаимосвязь напряженности и потенциала электростатического поля ( $d\varphi = -E(r)dr$ ) и формулу для напряженности поля такого шара  $\left( E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \right)$ . Тогда

$$d\varphi = -E(r)dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{dr}{r^2}.$$

Проинтегрируем это выражение по  $r$  от  $r_1 = R$  до  $r_2 = \infty$ :

$$\int_{\varphi}^0 d\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}. \quad (4.1.2)$$

Подставив (4.1.2) в (4.1.1), получим формулу для расчета емкости уединенного шара:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (4.1.3)$$

Емкостью в 1 Ф обладал бы уединенный шар, радиус которого в 1500 раз больше радиуса Земли ( $R_3 = 6400$  км).

## 4.2. Конденсаторы и их соединения.

*Конденсатор* – это устройство, которое способно при небольшом относительно окружающих тел потенциале накапливать существенный заряд. Если два проводника имеют такую форму, что создаваемое ими электрическое поле сосредоточено в ограниченной области пространства, то образованная ими система носит название *конденсатора*, а сами проводники называют *обкладками конденсатора*. В этом случае линии электрического смещения начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Электрические заряды, находящиеся на обкладках заряженного конденсатора, всегда равны по величине и противоположны по знаку. Таким образом, *конденсатор* представляет собой систему двух проводников, изолированных друг от друга. Кроме того, один из проводников должен быть изолирован от земли.

В зависимости от формы обкладок различают *плоские*, *сферические* и *цилиндрические* конденсаторы. Основной характеристикой конденсатора является электрическая емкость, под которой понимают физическую величину, пропорциональную заряду и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (4.2.1)$$

где  $q$  – заряд одной из обкладок;  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  – разность потенциалов (напряжение) между обкладками.

Величина емкости определяется геометрией конденсатора (формой и размерами обкладок и величиной зазора между ними), а также диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  среды, заполняющей пространство между обкладками. В случае если между обкладками конденсатора находится сегнетоэлектрик, диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  которого зависит от напряженности поля, то пропорциональность между  $q$  и  $\Delta\varphi$  нарушается, а конденсаторы называются *нелинейными*.

Получим формулы для расчета емкости различных типов конденсаторов.

*Плоский конденсатор* (рис. 4.2.1) состоит из двух параллельных металлических пластин (площадь каждой  $S$ ), расположенных на близком расстоянии  $d$  одна от другой и несущих заряды  $q_1 > 0$  и  $q_2 < 0$  ( $|q_1| = |q_2|$ ). Пространство заполнено средой, диэлектрическая проницаемость которой  $\varepsilon$ . Зазор  $d$  между пластинами мал по сравнению с их размерами, т. е. краевым эффектом можно пренебречь.

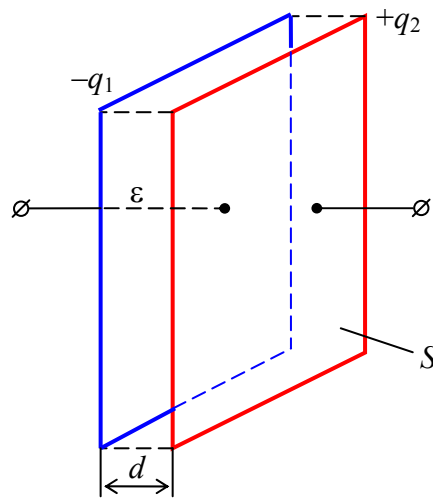


Рис. 4.2.1

Напряженность поля между обкладками  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ . Так как  $\sigma = \frac{q}{S}$ ,

$$\text{то } E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Тогда  $\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_0^d E dr = -\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} \int_0^d dr = -\frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$ . Учитывая формулу (4.2.1),

получим формулу для расчета емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \quad (4.2.2)$$

*Сферический конденсатор* (4.2.2) состоит из двух концентрических металлических сферических обкладок, радиусы которых  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), а пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Заряды обкладок обозначим через  $+q$  и  $-q$ , а потенциалы обкладок – соответственно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и будем считать заряд равномерно распределенным по поверхности. Используя теорему Гаусса, легко показать, что электрическое поле существует только в пространстве между сферами, и напряженность этого поля  $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2}$ . Напряженность поля связана с разностью потенциалов соотношением  $d\varphi = -E dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2} dr$ .

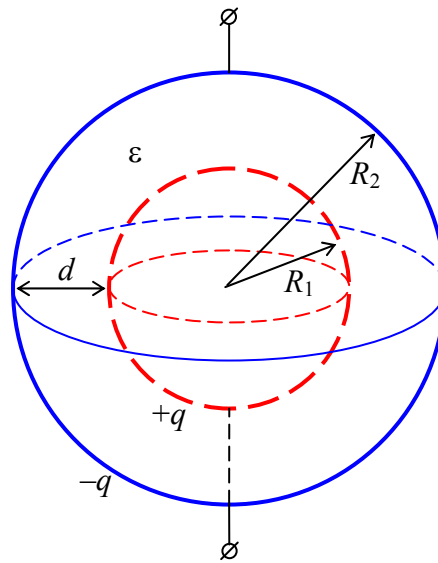


Рис. 4.2.2

Полное изменение потенциала при переходе с одной обкладки на другую получим интегрированием от  $R_1$  до  $R_2$ :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}.$$

Подставив выражение для разности потенциалов в (4.2.1), получим формулу для расчета емкости сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (4.2.3)$$

Если  $R_2 - R_1 = d \ll R_1$ , то можно считать  $R_2 \approx R_1$ . Тогда

$$C \approx \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 \cdot 4\pi R_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

где  $S = 4\pi R_1^2$  – площадь поверхности обкладок.

Таким образом, если величина зазора между обкладками сферического конденсатора мала по сравнению со средним радиусом сфер, то емкость сферического конденсатора можно приближенно рассчитать по формуле для емкости плоского конденсатора.

*Цилиндрический конденсатор* (рис. 4.2.3) представляет собой два коаксиальных (т. е. имеющих одну ось симметрии) полых цилиндра с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) и общей длиной  $l$ .

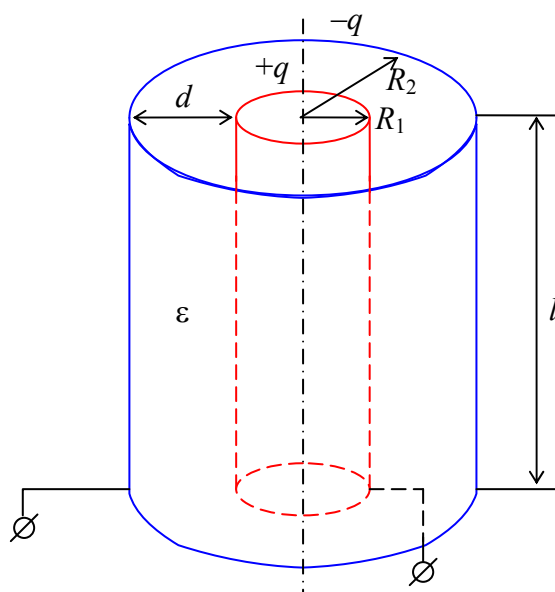


Рис. 4.2.3

Пусть на обкладках имеются заряды  $+q$  и  $-q$ , потенциалы которых соответственно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Пренебрегая краевыми эффектами на торцах цилиндров, напряженность поля, создаваемая только зарядом на внутреннем цилиндре в точке на расстоя-

нии  $r$  от оси цилиндра, можно найти по формуле  $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{\epsilon r}$ . Тогда

$$d\varphi = -E dr = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{\epsilon r} dr. \text{ Разность потенциалов между обкладками}$$

получим интегрированием от  $R_1$  до  $R_2$ :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Подставив выражение для разности потенциалов в (4.2.1), получим формулу для расчета емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (4.2.4)$$

Если зазор ( $d = R_2 - R_1$ ) между обкладками мал по сравнению с  $R_1$ , то  $\ln(R_2/R_1) \approx (R_2 - R_1)/R_1$  и

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l R_1}{R_2 - R_1} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

где  $S = 2\pi R_1 l$  – площадь обкладки.

Помимо емкости каждый конденсатор характеризуется предельным напряжением, которое можно прикладывать к обкладкам конденсатора, не опасаясь пробоя. При превышении этого напряжения между обкладками проскакивает искра, в результате чего разрушается диэлектрик, и конденсатор выходит из строя. Величина пробивного напряжения зависит от свойств диэлектрика, его толщины и формы обкладок.

Для того чтобы получить желаемую емкость при заданном рабочем напряжении, конденсаторы соединяют в батареи (параллельно или последовательно).

Рассмотрим параллельное соединение конденсаторов (рис. 4.2.4). При таком соединении разность потенциалов на обкладках конденсаторов одинакова. Заряды соответственно равны:  $q_1 = C_1(\varphi_1 - \varphi_2)$ ;  $q_2 = C_2(\varphi_1 - \varphi_2)$ ; ...;  $q_n = C_n(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Тогда заряд батареи конденсаторов  $q = \sum_{i=1}^n q_i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)(\varphi_1 - \varphi_2)$ , а полная емкость батареи определяется следующим образом:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{(C_1 + C_2 + \dots + C_n)(\varphi_1 - \varphi_2)}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_1 + C_2 + \dots + C_n,$$

ИЛИ

$$C = \sum_{i=1}^n C_i, \quad (4.2.5)$$

т. е. при параллельном соединении конденсаторов полная емкость равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

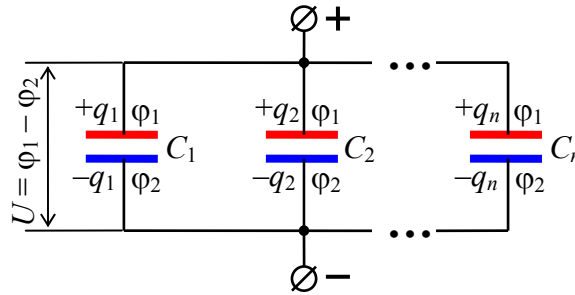


Рис. 4.2.4

Рассмотрим последовательное соединение конденсаторов (рис. 4.2.5). При таком соединении заряды всех обкладок равны по модулю. Если одной обкладке первого конденсатора сообщить заряд  $+q$ , то на его второй обкладке индуцируется заряд  $-q$ , а на соединенной с ней первой обкладке второго конденсатора появится заряд  $+q$  и т. д. Разность потенциалов на зажимах батареи  $\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i$ , где для любого

конденсатора  $\Delta\varphi_i = \frac{q}{C_i}$ .

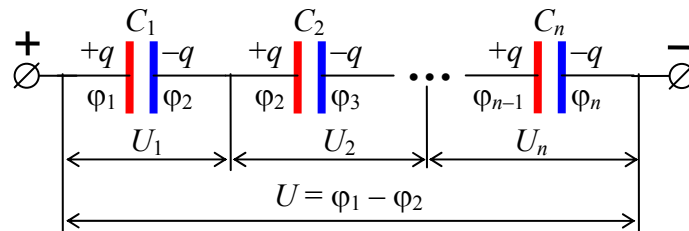


Рис. 4.2.5

Тогда  $\Delta\varphi = \frac{q}{C} = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ , откуда полная емкость

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}, \quad (4.2.6)$$

т. е. при последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкостям.

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов результирующая емкость всегда меньше наименьшей емкости, используемой в батарее.

При смешанном соединении конденсаторов емкость батареи конденсаторов можно рассчитать, используя формулы (4.2.5) и (4.2.6).

### **4.3. Энергия системы зарядов, проводника и конденсатора. Объемная плотность энергии электрического поля.**

*Энергия системы зарядов.* Заряд, находящийся на некотором проводнике, логично рассматривать как систему точечных зарядов. Рассмотрим систему, состоящую из двух зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Каждый из зарядов в поле другого обладает потенциальной энергией  $\Pi_1 = q_1\varphi_{12} = q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}$ , или

$\Pi_2 = q_2\varphi_{21} = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$ . Так как заряды неподвижны, то  $\Pi_1 = \Pi_2$ , поэтому энергия системы из двух неподвижных точечных зарядов равна:

$$\Pi = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21}).$$

Добавляя последовательно по одному заряду, получим, что энергия взаимодействия системы неподвижных зарядов равна:

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i, \quad (4.3.1)$$

где  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме  $q_i$ , в той точке, где помещается заряд  $q_i$ .

*Энергия проводника.* Рассмотрим уединенный проводник, предположив, что на проводнике уже имеется некоторый заряд  $q$ . Определим работу, которую надо затратить, чтобы из бесконечности на проводник перенести бесконечно малый заряд  $dq$ . Ввиду малости заряда  $dq$  будем считать, что при его сообщении проводнику потенциал проводника заметно не изменится. Тогда элементарная работа  $dA = \varphi dq$ , а полная работа переноса всех зарядов при зарядении тела от потенциала 0 до потенциала  $\varphi$  определим интегрированием:

$$A = \int_0^{\varphi} \varphi dq = \int_0^{\varphi} \varphi C d\varphi = C \int_0^{\varphi} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} C \varphi^2. \text{ Эта работа определяет энергию}$$

заряженного уединенного проводника. С учетом формулы (4.1.1) энергия заряженного уединенного проводника

$$W_3 = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}q\varphi. \quad (4.3.2)$$

*Энергия конденсатора.* В случае замыкания проводом обкладок заряженного конденсатора в нем возникнет электрический ток, и конденсатор разрядится. Электрический ток разряда конденсатора выделит в проводе некоторое количество теплоты, т. е. заряженный конденсатор обладает энергией.

Предположим, что конденсатор разряжается, и мгновенное значение напряжения на его обкладках составляет  $U(t)$ . Если бесконечно малый заряд  $dq$  переносится между обкладками конденсатора, то работа электрических сил

$$dA = dqU(t).$$

Так как  $dq = CdU$ , то  $dA = -CU(t)dU$ . Отрицательное значение работы указывает на то, что разность потенциалов между обкладками убывает. Тогда полная работа, совершенная электрическими силами за время разряда, равная энергии  $W_3$  конденсатора,

$$A = W_3 = -C \int_U^0 U(t)dU = \frac{1}{2}CU^2. \quad (4.3.3)$$

Выражение для энергии заряженного конденсатора можно представить в любом из следующих видов:

$$W_3 = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}qU. \quad (4.3.4)$$

*Энергия электрического поля.* Энергию заряженного конденсатора можно выразить через величины, характеризующие электрическое поле в зазоре между обкладками конденсатора. Для плоского конденсатора  $W_3 = \frac{CU^2}{2}$ . Подставим выражения для емкости и получим:

$W_3 = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \left( \frac{U}{d} \right)^2 Sd$ , где  $\frac{U}{d} = E$  есть напряженность поля в зазоре, а произведение  $Sd = V$  представляет собой объем, занимаемый полем конденсатора. Следовательно,

$$W_3 = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 V. \quad (4.3.5)$$



Если поле однородно (что имеет место в плоском конденсаторе), заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью  $w_э$ , равной энергии поля, деленной на занимаемый полем объем. Из (4.3.5) следует, что объемная плотность энергии электрического поля

$$w_э = \frac{W_э}{V} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}. \quad (4.3.6)$$

Энергия, приходящаяся на единицу объема в электростатическом поле, называется *плотностью энергии электростатического поля*.

Интеграл

$$W_э = \int_V w_э dV = \int_V \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} dV \quad (4.3.7)$$

представляет собой энергию поля, заключенную в любом объеме  $V$ , вычислить которую можно, зная энергию поля в каждой точке.

## Тема 5. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### Лекция № 8

5.1. Условия существования и характеристики постоянного электрического тока.

5.2. Законы Ома в интегральной и дифференциальной формах.

5.3. Правила Кирхгофа для расчета электрических цепей.

#### **5.1. Условия существования и характеристики постоянного электрического тока.**

*Электрическим током* называется любое упорядоченное движение электрических зарядов. В проводнике под действием приложенного электрического поля свободные электрические заряды перемещаются: положительные – по полю, отрицательные – против поля, т. е. в проводнике возникает электрический ток, называемый *током проводимости*. Свободными носителями электрических зарядов в металлах являются электроны, в электролитах – положительные и отрицательные ионы, в газах – электроны и положительные ионы, в полупроводниках – электроны и дырки.

Для возникновения и существования электрического тока необходимо наличие:

а) свободных носителей заряда, способных перемещаться упорядоченно;

б) электрического поля, энергия которого должна каким-то образом восполняться.

*Количественной* характеристикой электрического тока является сила тока. *Сила тока* – это скалярная физическая величина  $I$ , определяемая электрическим зарядом  $dq$ , проходящим через поперечное сечение проводника  $S$  в единицу времени  $dt$ :

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (5.1.1)$$

Если сила тока и его направление не изменяются во времени, то ток называется *постоянным*, или *стационарным*. Сила постоянного тока

$$I = \frac{q}{t}. \quad (5.1.2)$$

Сила постоянного тока во всех сечениях проводника одинакова. Единица силы тока – ампер ( $1 \text{ A} = 1 \text{ Кл/с}$ ).

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет, неравномерно. Для характеристики направления электрического тока в разных точках рассматриваемой поверхности и распределения силы тока по этой поверхности служит *вектор плотности тока*  $\vec{j}$ . Сила тока сквозь произвольную поверхность определяется как поток вектора плотности тока:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (5.1.3)$$

*Вектор плотности тока* – это физическая величина, численно равная силе тока  $dI$ , проходящей через единицу площади  $dS_{\perp}$  поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (5.1.4)$$

где  $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$ .

Тогда  $dI = j dS \cos \alpha = j_n dS = \vec{j} \cdot \vec{n} dS$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор, нормальный к площадке  $dS$ ;  $j_n = j \cos \alpha$  – проекция вектора  $\vec{j}$  на направление нормали  $\vec{n}$ .

Для постоянного тока, текущего перпендикулярно сечению проводника,

$$j = \frac{I}{S}. \quad (5.1.5)$$

Плотность постоянного тока одинакова по всему поперечному сечению  $S$  однородного проводника.

Вектор плотности электрического тока совпадает по направлению с движением положительно заряженных частиц. Плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр ( $1 \text{ А/м}^2$ ).

Выразим силу и плотность тока через среднюю скорость упорядоченного движения свободных носителей заряда в проводнике. Пусть за время  $dt$  через поперечное сечение проводника переносится заряд  $dq = ne\langle u \rangle S dt$ . Следовательно, сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{ne\langle u \rangle S dt}{dt} \Rightarrow I = ne\langle u \rangle S, \quad (5.1.6)$$

где  $n$  – концентрация свободных носителей заряда;  $e$  – элементарный заряд;  $\langle u \rangle$  – средняя скорость носителей заряда.

Для плотности тока

$$j = \frac{I}{S} = ne\langle u \rangle \Rightarrow \vec{j} = ne\langle \vec{u} \rangle. \quad (5.1.7)$$

Таким образом, плотность тока пропорциональна средней скорости носителей заряда.

### 5.2. Законы Ома в интегральной и дифференциальной формах.

*Однородный (пассивный) участок электрической цепи.* Участок электрической цепи, не содержащий источников электроэнергии, называется *однородным* (рис. 5.2.1). Для такого участка (проводника) закон Ома, который установлен экспериментально, гласит: сила тока  $I$  в проводнике прямо пропорциональна напряжению  $U$  на его концах и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению  $R$  проводника (участка):

$$I = \frac{U}{R}. \quad (5.2.1)$$

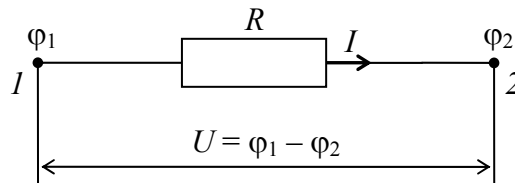


Рис. 5.2.1

Единица сопротивления – ом ( $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А}$ ).

Выражение (5.2.1) является *законом Ома для однородного участка цепи в интегральной форме*.

Величина  $g$ , обратная сопротивлению, называется *электрической проводимостью* (или *электропроводностью*) проводника:

$$g = \frac{1}{R}. \quad (5.2.2)$$

Единица электропроводности – сименс ( $1 \text{ См} = 1 \text{ А/В} = 1/\text{Ом}$ ).

Сопротивление и электропроводность проводника являются его характеристиками, которые зависят от природы вещества проводника, его геометрии и состояния. Для однородного линейного проводника сопротивление прямо пропорционально его длине  $l$  и обратно пропорционально площади поперечного сечения  $S$  проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (5.2.3)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление вещества.

Единица удельного сопротивления – ом-метр ( $1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ).

Величина  $\gamma = \frac{1}{\rho}$  называется удельной электрической проводимостью (или удельной электропроводностью) материала проводника.

Единица удельной электропроводности – сименс на метр ( $1 \text{ См/м} = 1 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ).

Опытным путем установлено, что для большинства металлов с повышением температуры удельное сопротивление (а значит, и сопротивление) увеличивается. Такое изменение удельного сопротивления (сопротивления) описывается линейным законом, если интервал изменения температуры достаточно мал:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \text{ или } R = R_0(1 + \alpha t), \quad (5.2.4)$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$ ,  $R$  и  $R_0$  – соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при температурах  $t^\circ\text{C}$  и  $0^\circ\text{C}$ ;  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления.

Для всех химически чистых металлов коэффициент  $\alpha$  близок к  $1/273$ .

Зависимость сопротивления металлов от температуры используют в различных измерительных и автоматических устройствах (например, термисторы, термометры сопротивления), а зависимость удельного сопротивления металлов от механических воздействий, которая для чистых металлов и сплавов возрастает при растяжении, используется для измерения деформаций и механических напряжений.

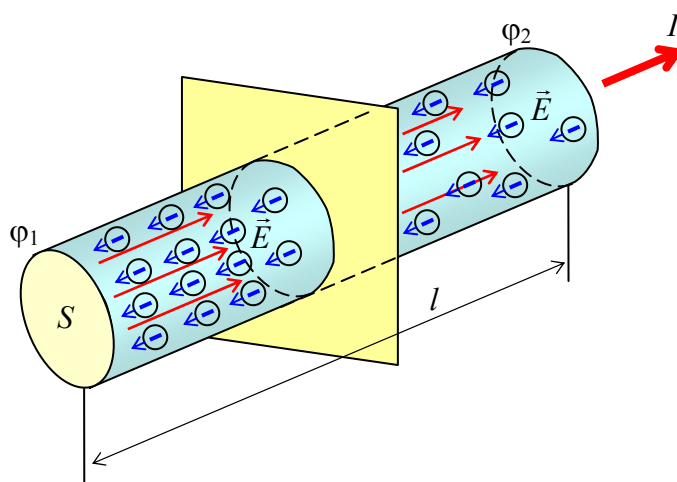


Рис. 5.2.2

Расчет силы тока в проводящей среде в общем случае осуществляется на основе закона Ома в дифференциальной форме. Для его вывода рассмотрим небольшой отрезок трубки тока (рис. 5.2.2) в однородной и изотропной проводящей среде. На рисунке  $l$  – расстояние между точками 1 и 2, потенциалы которых соответственно равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а  $S$  – средняя величина площади сечения трубки тока.

По закону Ома  $I = \frac{U}{R_{12}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}}$ , где  $R_{12} = \rho \frac{l}{S}$ .

Далее учтем, что  $I = jS$  и  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ .

Тогда

$$jS = -\gamma \frac{\Delta\varphi}{l} S \Rightarrow j = -\gamma \frac{\Delta\varphi}{l}.$$

Но  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta\varphi}{l} \right) = -\frac{d\varphi}{dl} = E$ , где  $E$  – напряженность электрического

поля в некоторой точке внутри проводника. Таким образом, имеем:

$$j = \gamma E, \text{ или } \vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (5.2.5)$$

Плотность электрического тока в любой точке проводящей среды вычисляется как произведение удельной электропроводности среды на напряженность электрического поля в этой точке.

Выражение (5.2.5) является *законом Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме*.

Сравнив формулу (5.2.5) с уравнением (5.1.7), можем сказать, что средняя скорость упорядоченного движения (скорость дрейфа) носителей заряда пропорциональна напряженности поля, т. е.

$$\langle \vec{u} \rangle = a \vec{E}. \quad (5.2.6)$$

где  $a$  – *подвижность носителей заряда*. Подставив выражение (5.2.6) в уравнение (5.1.7), получим:

$$\vec{j} = ena \vec{E} = \gamma \vec{E}. \quad (5.2.7)$$

Таким образом, удельная электропроводимость  $\gamma$  среды определяется концентрацией носителей заряда и их подвижностью, т. е.  $\gamma = ena$ .

*Неоднородный (активный) участок электрической цепи.* Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то перемещение носителей тока приведет к тому, что потен-

циалы всех точек цепи выравниваются, и поле внутри проводника исчезнет, а ток прекратится. Для того чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, нужно от конца проводника с меньшим потенциалом непрерывно отводить приносимые сюда заряды, а к концу с большим потенциалом непрерывно их подводить (разделение разноименных зарядов), т. е. необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов. Устройство, способное создавать и поддерживать разность потенциалов, называют *источником электрической энергии* (или *генератором*). В источниках электроэнергии на носители зарядов действуют силы неэлектростатического происхождения, которые называются *сторонними силами*. Они могут быть обусловлены химическими процессами, вихревыми электрическими полями, диффузией носителей заряда в неоднородной среде и т. д.

Количественной характеристикой сторонних сил является напряженность  $\vec{E}_{\text{ст}}$ , которая определяется сторонней силой, действующей на единичный положительный заряд. Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Физическая величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда в цепи или на ее участке, называется *электродвижущей силой* (ЭДС) источника электроэнергии:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}. \quad (5.2.8)$$

Эта работа совершается за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока.

Работа сторонних сил по перемещению заряда  $q_0$  на участке цепи равна:

$$A_{\text{ст}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = q_{\text{пр}} \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (5.2.9)$$

Отсюда ЭДС, действующая в замкнутой цепи, – это циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (5.2.10)$$

Для поля сторонних сил циркуляция его напряженности по замкнутому контуру не равна нулю. Поэтому поле сторонних сил непотенциально.

Участок электрической цепи называется *неоднородным*, если он содержит источник (или источники) электрической энергии (рис. 5.2.3).

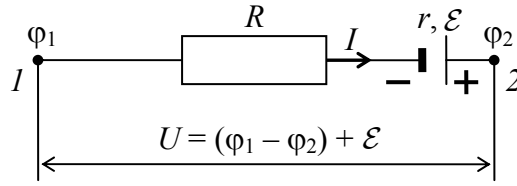


Рис. 5.2.3

Рассмотрим участок цепи, полное сопротивление которого  $R_{12}$  и  $\varphi_1 > \varphi_2$ . Для любой точки данного участка напряженность результирующего поля  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{ст}}$ . Поэтому закон Ома для неоднородного участка цепи в дифференциальной форме запишется в виде:

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (5.2.11)$$

В случае если на заряд кроме сторонних сил действуют силы электростатического поля, то результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд, равна:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{эл}} + \vec{F}_{\text{ст}} = q_{\text{пр}}(\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (5.2.12)$$

Тогда работа, совершаемая этой силой на участке цепи  $1 \rightarrow 2$ , определяется выражением

$$A_{12} = q_{\text{пр}} \int_1^2 \vec{E}_{\text{эл}} d\vec{l} + q_{\text{пр}} \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} = q_{\text{пр}}(\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}). \quad (5.2.13)$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электрическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется *падением напряжения*, или просто *напряжением на данном участке цепи*:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q_{\text{пр}}} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (5.2.14)$$

Так как  $U_{12} = IR_{12}$ , то

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (5.2.15)$$

С учетом выражения (5.2.15) закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме принимает вид:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R_{12}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R + r}, \quad (5.2.16)$$



где  $R$  – сопротивление внешнего участка цепи;  $r$  – внутреннее сопротивление источника тока.

При использовании (5.2.16) для расчета характеристик участка электрической цепи пользуются *правилами знаков* для силы тока и ЭДС: если направление тока (выбранное произвольно) совпадает с направлением движения по участку от точки 1 до точки 2, то сила тока  $I$  берется со знаком «плюс», в противоположном случае сила тока  $I$  берется со знаком «минус»; если внутри источника ток идет от катода к аноду, т. е. напряженность поля сторонних сил в источнике совпадает по направлению с током на участке цепи, то ЭДС этого источника считается положительной, в противоположном случае ЭДС этого источника считается отрицательной.

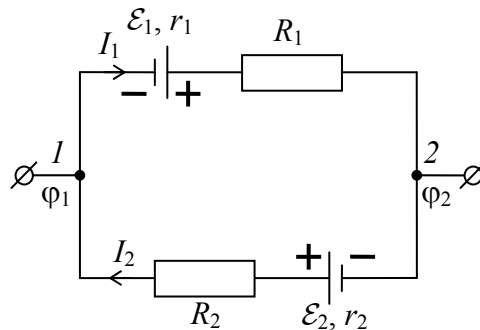


Рис. 5.2.4

Для электрической цепи, состоящей из двух участков и изображенной на рис. 5.2.4, согласно выбранному направлению движения по каждому участку от точки 1 до точки 2 и правилам знаков уравнения, записанные с применением закона Ома (5.2.16) для неоднородного участка цепи, имеют следующий вид:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1}{R_1 + r_1}; \quad -I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E}_2}{R_2 + r_2}.$$

Если цепь замкнута, то в выражении (5.2.16)  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , и получаем выражение *закона Ома для замкнутой цепи* (рис. 5.2.5):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{12}} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (5.2.17)$$

Если  $R \ll r$ , то происходит *короткое замыкание* источника энергии. Сила тока короткого замыкания достигает максимального значения и равна:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{r} = I_{\text{к.з.}} \quad (5.2.18)$$

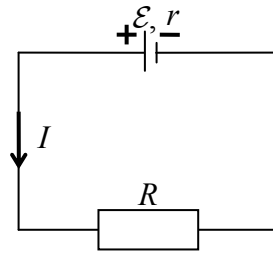


Рис. 5.2.5

Для большинства реальных источников из-за малости  $r$  режим короткого замыкания является аварийным, и поэтому применяют защиту от короткого замыкания.

### 5.3. Правила Кирхгофа для расчета электрических цепей.

Расчет разветвленных электрических цепей упрощается, если пользоваться правилами, сформулированными немецким физиком Густавом Робертом Кирхгофом. Этих правил два. Первое из них относится к узлам цепи. *Узлом* называется точка разветвленной цепи, в которой сходится три и более проводника (рис. 5.3.1). Ток, текущий к узлу, берется со знаком «плюс», а от узла – со знаком «минус».

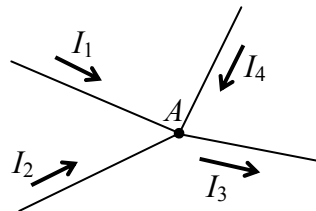


Рис. 5.3.1

*Первое правило Кирхгофа:* алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле разветвленной электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (5.3.1)$$

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда применительно к узлу разветвленной цепи. Уравнение для узла  $A$  на рис. 5.3.1, записанное с применением первого правила Кирхгофа, имеет следующий вид:  $I_1 + I_2 + I_4 - I_3 = 0$ .

*Второе правило Кирхгофа (правило контуров):* в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_i$  на сопротивления  $R_i$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников  $\mathcal{E}$ , действующих в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k. \quad (5.3.2)$$

Второе правило Кирхгофа является обобщением закона Ома на разветвленные электрические цепи.

Применяя второе правило Кирхгофа, необходимо помнить правило знаков для силы тока и ЭДС: если направление тока, выбранное произвольно, совпадает с направлением обхода контура (выбор этого направления произволен), то сила тока  $I$  берется со знаком «плюс», в противоположном случае – со знаком «минус»; ЭДС считаются положительными, если они создают токи, совпадающие с направлением обхода контура (при обходе контура внутри источника мы идем от отрицательного полюса источника к положительному), в противоположном случае – отрицательными (рис. 5.3.2).

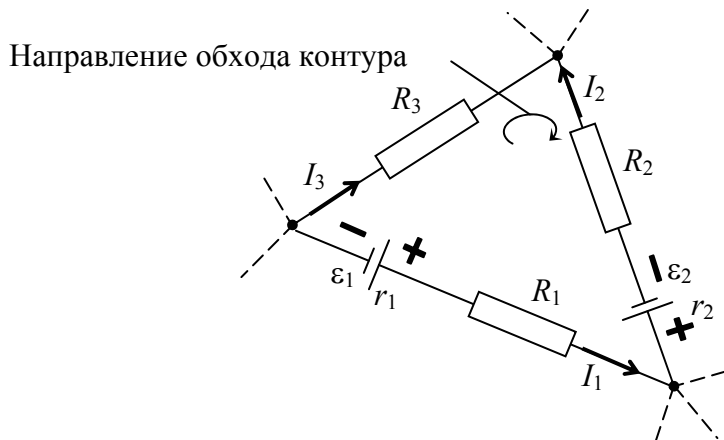


Рис. 5.3.2

Для контура, изображенного на рис. 5.3.2, согласно выбранному направлению обхода (по часовой стрелке) уравнение, записанное по второму правилу Кирхгофа, будет иметь следующий вид:

$$I_3 R_3 - I_2 (R_2 + r_2) - I_1 (R_1 + r_1) = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1.$$

Порядок действий при решении задач с применением правил Кирхгофа следующий:

1. Произвольно выбрать и указать на схеме электрической цепи направление токов на всех участках.

2. Произвольно выбрать направление обхода всех контуров цепи и указать его на рисунке.

3. Записать на основе первого правила Кирхгофа (5.3.1)  $k - 1$  уравнений ( $k$  – число узлов в рассчитываемой электрической цепи).

4. На основе второго правила Кирхгофа (5.3.2) составить такое число уравнений, чтобы общее число составленных уравнений (с учетом уравнений, записанных по первому правилу Кирхгофа) было равно числу неизвестных задачи. Выбранные замкнутые контуры цепи должны отличаться хотя бы одним участком.

В разветвленной цепи, содержащей  $k$  узлов и  $y$  участков цепи между соседними узлами, число независимых уравнений, соответствующих второму правилу Кирхгофа, составляет  $k - y + 1$ .

5. Решить полученную систему алгебраических уравнений.

6. В случае если рассчитанное значение силы тока (или какой-либо другой искомой величины) в каком-либо участке электрической цепи окажется положительным, то направление тока совпадает с выбранным на схеме, в противном случае ток направлен противоположно выбранному направлению.

## Лекция № 9

5.4. Работа и мощность тока.

5.5. Закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах.

### **5.4. Работа и мощность тока.**

Рассмотрим произвольный однородный участок, к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через сечения проводника переносится заряд  $dq = Idt$ . Работа сил электрического поля по переносу заряда  $dq$  будет равна:

$$dA = Udq = IUdt. \quad (5.4.1)$$

В этом случае работу электрического поля называют *работой тока*. Используя закон Ома, получим:

$$dA = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (5.4.2)$$

Разделив работу  $dA$  на время  $dt$ , за которое она совершается, получим мощность  $P$ , развиваемую током на рассматриваемом участке цепи:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (5.4.3)$$

Формулы (5.4.3) справедливы и для постоянного, и для переменного токов. В случае переменного тока этими формулами определяется мгновенное значение мощности.

### **5.5. Закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах.**

При прохождении тока по неподвижному металлическому проводнику происходит рассеяние энергии вследствие столкновений носителей заряда между собой и с другими частицами среды. Вся работа тока полностью превращается во внутреннюю энергию проводника, в результате чего проводник нагревается, и по закону сохранения энергии выделяемое количество теплоты  $\delta Q$  за малый промежуток времени  $dt$  равно:

$$\delta Q = dA. \quad (5.5.1)$$

Следовательно,

$$\delta Q = UI dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (5.5.2)$$

Количество теплоты, выделяющееся за конечный промежуток времени  $t$  током, который изменяется со временем ( $I = I(t)$ ), во всем объеме проводника получаем интегрированием. В этом случае количество теплоты, выделяющееся за время  $t$ , надо рассчитывать по формуле

$$Q = \int_0^t (I(t))^2 R dt. \quad (5.5.3)$$

Если ток постоянный, то

$$Q = I^2 R t. \quad (5.5.4)$$

Последнее уравнение было экспериментально установлено английским физиком Джеймсом Прескоттом Джоулем и независимо от него русским физиком Эмилием Христиановичем Ленцем и носит название *закона Джоуля – Ленца в интегральной форме*: количество теплоты, выделяемое постоянным электрическим током на участке цепи, равно произведению квадрата силы тока на время его прохождения и электрическое сопротивление этого участка цепи.

Получим *закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме*. Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем  $dV = dS dl$ , обладающий сопротивлением  $R = \rho \frac{dl}{dS}$ . Ось цилиндра совпадает с направлением тока. По закону Джоуля – Ленца за время  $dt$  в этом объеме выделится теплота

$$dQ = I^2 R dt = (jdS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt, \quad (5.5.5)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление материала проводника;  $j$  – плотность тока в проводнике.

Величина  $Q_{\text{уд}} = \frac{dQ}{dV dt}$  называется *удельной тепловой мощностью тока*. Удельная тепловая мощность тока – это количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема.

С учетом этого *закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме* будет иметь вид:

$$Q_{\text{уд}} = \rho j^2 = \frac{1}{\gamma} j^2. \quad (5.5.6)$$

С учетом закона Ома в дифференциальной форме ( $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ) получим:

$$Q_{\text{уд}} = \gamma E^2 = \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (5.5.7)$$

Таким образом, удельная тепловая мощность тока вычисляется как произведение удельной электропроводности среды на квадрат напряженности электрического поля в этой точке среды.

## Тема 6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ВАКУУМЕ И ЖИДКОСТИ

### Лекция № 9 (продолжение)

- 6.1. Эмиссионные явления и их применение.
- 6.2. Вакуумный диод. Вольт-амперная характеристика вакуумного диода.
- 6.3. Электрический ток в жидкости. Законы Фарадея для электролиза.

#### **6.1. Эмиссионные явления и их применение.**

*Электронной эмиссией* называется явление испускания электронов твердым (или жидким) телом, которое называется *эмиттером*. Для того чтобы часть электронов могла выйти за пределы тела и, следовательно, участвовать в электронной эмиссии, их необходимо предварительно возбудить, т. е. сообщить дополнительную энергию. В зависимости от того, какова природа источника энергии возбуждения электронов, различают *термоэлектронную, фотоэлектронную, вторичную электронную и автоэлектронную эмиссии*.

*Термоэлектронная эмиссия* – испускание электронов нагретыми телами. Источником энергии возбуждения электронов является тепловая энергия. Явление термоэлектронной эмиссии используется в приборах, в которых необходимо получить поток электронов в вакууме, например в электронных лампах, электронно-лучевых трубках, рентгеновских трубках и т. д.

*Фотоэлектронная эмиссия (внешний фотоэффект)* – испускание телом электронов при облучении его поверхности светом. Энергия возбуждения электронов сообщается электромагнитной волной (фотонами). Катоды электровакуумных приборов, испускающие электроны под действием света, называются *фотокатодами*.

*Вторичная электронная эмиссия* – испускание телом так называемых вторичных электронов при ударах о его поверхность первичных электронов, ускоренных электрическим полем. Источником энергии возбуждения электронов эмиттера в этом случае является кинетическая энергия первичных электронов. Возбуждение происходит за счет кулоновского взаимодействия первичных электронов и электронов эмиттера. Вторичная электронная эмиссия используется в фотоэлектронных умножителях (ФЭУ), применяемых для усиления слабых электрических токов.

Термоэлектронная, фотоэлектронная и вторичная электронная эмиссии называются *эмиссиями с предварительным возбуждением электронов*.



В отсутствие силовых полей в вакууме, окружающем эмиттер, полная энергия электронов вне эмиттера либо равна нулю, либо положительна, если он движется. В основном (не возбужденном) состоянии электроны занимают наиболее низкие энергетические уровни с энергиями, меньшими или равными энергии Ферми  $W_F$ . Внутри материала эмиттера возможны состояния электронов как с отрицательными энергиями (связанное состояние электрона), так и с положительными энергиями (свободное состояние электрона). Для того чтобы часть электронов могла выйти за пределы тела и, следовательно, участвовать в электронной эмиссии, их необходимо предварительно возбудить, т. е. сообщить им такую дополнительную энергию, чтобы их энергия стала положительной.

Если вблизи поверхности эмиттера имеется сильное электрическое поле, тянущее электроны от его границы, то энергия электрона вне эмиттера в этом поле будет убывать с увеличением расстояния до эмиттера. В этом случае эмиттер могут покидать не только те электроны, которые получили дополнительную энергию. Возникновение такой эмиссии объясняется тем, что сильное электрическое поле у эмиттера уменьшает потенциальный барьер у поверхности материала эмиттера, что приводит к увеличению вероятности испускания электронов. Такая разновидность электронной эмиссии называется *туннельной эмиссией* и обусловлена волновыми свойствами электронов. Примером туннельной эмиссии является *автоэлектронная эмиссия*.

*Автоэлектронная эмиссия* – испускание электронов поверхностью тела при наличии у поверхности сильного внешнего электрического поля (более  $10^8$  В/м). При автоэлектронной эмиссии не возбужденные электроны эмиттера выходят в окружающее пространство путем *туннелирования*.

Электроны проводимости могут вырваться из материала эмиттера в окружающее пространство, если обладают достаточно большой кинетической энергией. При этом они совершают работу, которая называется *работой выхода*. Под работой выхода понимается наименьшая энергия, которую надо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из металла.

Физическая природа работы выхода определяется рядом факторов. При удалении одного из электронов из металла оставшиеся в нем электроны окажутся в иных условиях, чем до удаления. Это вызовет изменение их состояний и соответствующее изменение энергии, которое и произойдет за счет части работы выхода. Электроны, покинувшие эмиттер, образуют вблизи поверхности металла отрицательно

заряженный электрический слой, который вместе с избыточным положительным зарядом ионов под поверхностью металла образует двойной электрический слой, поле которого тормозит проходящие сквозь него электроны. На преодоление этого поля также расходуется часть работы выхода. Электрон, вышедший в вакуум, индуцирует на поверхности металла положительный заряд, работа по преодолению притяжения которого также является составляющей работы выхода.

Работа выхода зависит от химической природы металла и состояния его поверхности. Эта величина слабо зависит от температуры. Для чистых металлов работа выхода колеблется в пределах нескольких электронвольт.

### **6.2. Вакуумный диод. Вольт-амперная характеристика вакуумного диода.**

Явление термоэлектронной эмиссии лежит в основе устройства различных электронных приборов. Одним из таких приборов является *вакуумный диод (двухэлектродная электронная лампа)*, который представляет собой стеклянный (или металлический) баллон, откачанный до глубокого вакуума, внутри которого размещены два электрода – *анод А* и *катод К*.

Анод имеет форму кругового цилиндра, а катод – проволочной спирали, натянутой вдоль оси этого цилиндра. Катод изготавливается из тугоплавкого металла (вольфрама, молибдена и др.) или покрывается слоем оксидов щелочноземельных металлов (бария, стронция и др.) толщиной в сотые доли миллиметра. Такой катод называется оксидным. Поверхность оксидного катода при нагревании выделяет гораздо больше электронов, чем поверхность катода из чистого металла, т. к. слой оксида уменьшает работу выхода электронов из вещества катода. На рис. 6.2.1 показано схематическое изображение диода.

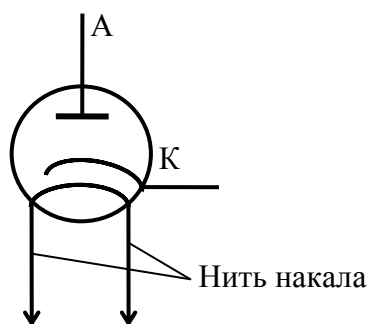


Рис. 6.2.1

Диод обладает односторонней проводимостью. Это свойство диода можно обнаружить с помощью электрической цепи, изображенной на рис. 6.2.2. Катод нагревается током, создаваемым батареей накала Бат. 1, и испускает электроны, движущиеся к аноду под действием электрического поля напряженности  $E$ , направленной к катоду. Температуру катода можно изменять, регулируя силу тока накала с помощью реостата  $R_{\text{нак}}$ . На электроды подается напряжение от батареи Бат. 2. Анодное напряжение  $U_a$  измеряется с помощью вольтметра  $V$ , а сила анодного тока  $I_a$  – микроамперметром  $\mu A$ .

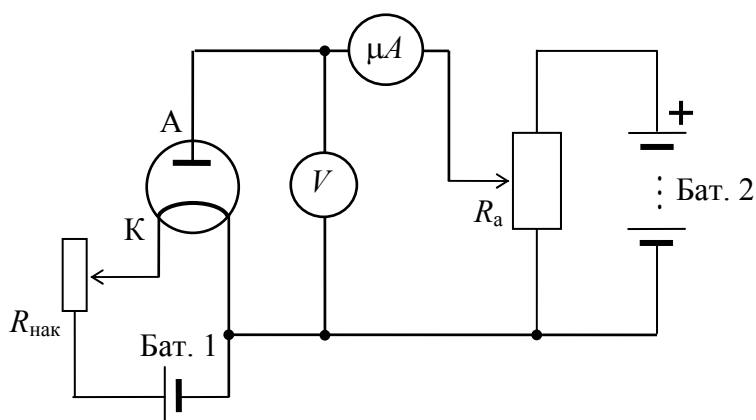


Рис. 6.2.2

С увеличением напряжения между анодом и катодом сила термоэлектронного тока также возрастает. Кривая зависимости силы анодного тока  $I_a$  от анодного напряжения  $U_a$  при постоянном токе накала катода называется *вольт-амперной характеристикой диода*. На рис. 6.2.3 изображены три вольт-амперные характеристики диода, соответствующие разным температурам катода, начальные участки (0123) которых совпадают.

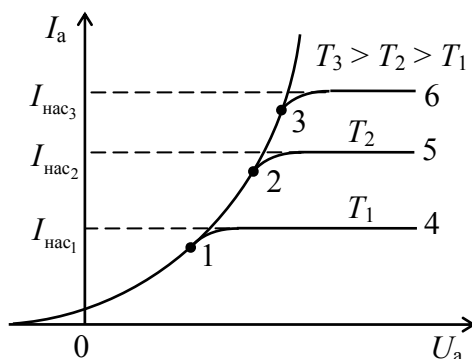


Рис. 6.2.3

Нелинейный вид зависимости  $I_a = I_a(U_a)$  объясняется тем, что вокруг катода образуется электронное облако, препятствующее движению к аноду электронов, вновь вылетающих из катода. С увеличением напряжения между электродами плотность электронного облака уменьшается, анод достигает большее количество электронов, и сила тока растет. При достаточно большом значении  $U_a$  все электроны, покинувшие катод, попадают на анод, и сила тока  $I_a$  достигает максимально возможного значения при данной температуре катода. Это значение тока называется *током насыщения*  $I_{\text{нас}}$ . Сила тока насыщения определяется формулой  $I_{\text{нас}} = Ne$ , где  $N$  – число электронов, вылетающих в единицу времени с поверхности катода;  $e$  – заряд электрона.

При малых значениях  $U_a$  кривые зависимости  $I_a = I_a(U_a)$  совпадают. При  $U_a = 0$  сила анодного тока не равна нулю, т. к. некоторое число электронов из электронного облака попадает на анод, и в анодной цепи существует очень малый ток. Ток достигает насыщения только в том случае, если катод не покрыт оксидным слоем. В диодах с оксидным катодом данное явление не происходит, т. к. это требует больших напряжений, при которых катод разрушается. При отрицательном потенциале анода лампы сила анодного тока  $I_a = 0$ . Вентильное действие диода используют для устройства выпрямителей переменного тока.

Опытным путем установлено, что сила тока насыщения резко возрастает с повышением температуры катода. Плотность силы тока насыщения  $j_{\text{нас}}$  определяется уравнением, которое называется формулой Ричардсона – Дэшмана:

$$j_{\text{нас}} = B'T^2 \exp(-A/kT), \quad (6.2.1)$$

где  $B'$  – эмиссионная постоянная, зависящая от материала катода и состояния его поверхности;  $T$  – абсолютная температура катода;  $A$  – работа выхода электрона из металла;  $k$  – постоянная Больцмана.

Первоначально уравнение для плотности силы тока насыщения  $j_{\text{нас}}$  было получено английским физиком Оуэном Уильянсом Ричардсоном на основе классической электронной теории металлов и затем уточнено им при термодинамическом рассмотрении термоэлектронной эмиссии. Окончательно уточнил вид уравнения американский ученый С. Дэшман на основе квантовой теории. Полученную им формулу (6.2.1) обычно и называют *формулой Ричардсона – Дэшмана*.

В интервале малых значений напряжения между анодом и катодом (участок 0123) зависимость  $I_a = I_a(U_a)$  выражается законом Богу-

славского – Ленгмюра, или законом «трех вторых» (установлен русским физиком Сергеем Анатольевичем Богуславским и американским физиком Ирвингом Ленгмюром):

$$I = KU_a^{3/2}, \quad (6.2.2)$$

где  $K$  – коэффициент, характеризующий форму и размеры электродов и не зависящий от температуры катода.

### 6.3. Электрический ток в жидкости. Законы Фарадея для электролиза.

*Электролитами* принято называть проводящие среды, в которых протекание электрического тока сопровождается переносом и выделением на электродах вещества. Это явление получило название *электролиза*. Носителями свободных зарядов в электролитах являются положительно и отрицательно заряженные ионы. К электролитам относятся многие соединения металлов с металлоидами в расплавленном состоянии, водные растворы неорганических кислот, солей и оснований, расплавленные соли, кристаллы которых построены из ионов (например,  $\text{NaCl}$ ,  $\text{NaNO}_3$ ), а также некоторые твердые вещества.

Электрический ток в электролитах представляет собой перемещение положительных ионов к отрицательному электроду (*катоде*) и отрицательных ионов к положительному электроду (*аноде*). Ионы обоих знаков появляются в водных растворах солей, кислот и щелочей в результате расщепления части нейтральных молекул. Это явление называется *электролитической диссоциацией*. Например, хлорид меди  $\text{CuCl}_2$  диссоциирует в водном растворе на ионы меди и хлора:



При подключении электродов к источнику тока ионы под действием электрического поля начинают упорядоченное движение: положительные ионы меди движутся к катоду, а отрицательно заряженные ионы хлора – к аноду (рис. 6.3.1).

Достигнув катода, ионы меди нейтрализуются избыточными электронами катода и превращаются в нейтральные атомы, оседающие на катоде. Ионы хлора, достигнув анода, отдают по одному электрону. После этого нейтральные атомы хлора соединяются попарно и образуют молекулы хлора  $\text{Cl}_2$ , который выделяется на аноде в виде пузырьков.

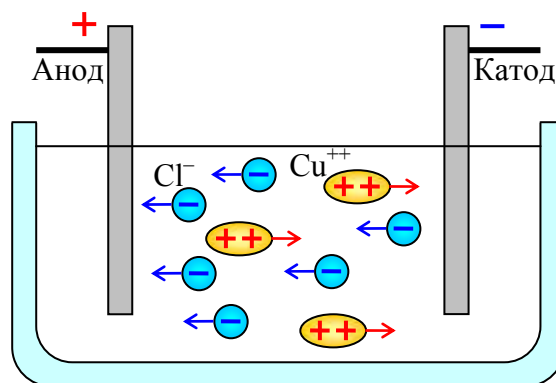


Рис. 6.3.1

Мерой электролитической диссоциации является *коэффициент диссоциации*  $\alpha$ , который определяет, какая доля всех молекул распалась на ионы. Величина коэффициента диссоциации зависит от концентрации раствора и от природы растворяемого вещества и растворителя. Для слабых электролитов выполняется *закон Оствальда* (балтийский немец Вильгельм Фридрих Оствальд):

$$\left( \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \right) n = \text{const}, \quad (6.3.1)$$

где  $n$  – концентрация молекул соединения.

Для слабых электролитов значение  $\alpha$  близко к единице, т. к. концентрация ионов мала, и рекомбинация (процесс, обратный электролитической диссоциации) почти отсутствует. Как следует из формулы (6.3.1), коэффициент диссоциации  $\alpha$  убывает с увеличением концентрации раствора сильных электролитов, и молекулы в них диссоциированы полностью, но часть ионов из-за действия электрических сил образуют, например, пары, и поэтому не принимают участие в переносе заряда.

Законы электролиза были экспериментально установлены английским физиком Майклом Фарадеем в 1833 г.

*Первый закон Фарадея* определяет количества первичных продуктов, выделяющихся на электродах при электролизе, и формулируется следующим образом: *масса  $m$  вещества, выделившегося на электроде, прямо пропорциональна заряду  $q$ , прошедшему через электролит:*

$$m = kq = kIt, \quad (6.3.2)$$

где  $k$  – *электрохимический эквивалент* вещества;  $I$  – сила постоянного тока, протекающего через электролит в течение времени  $t$ .

Масса выделившегося на электроде вещества равна массе всех ионов, пришедших к электроду:

$$m = m_0 N = m_0 \frac{q}{q_0} = \frac{m_0}{q_0} It, \quad (6.3.3)$$

где  $m_0$  и  $q_0$  – масса и заряд одного иона;  $N$  – число ионов, пришедших к электроду при прохождении через электролит заряда  $q$ .

Таким образом, электрохимический эквивалент  $k$  равен отношению массы  $m_0$  иона данного вещества к его заряду  $q_0$ . Так как заряд иона равен произведению валентности  $z$  вещества на элементарный заряд  $e$  ( $q_0 = ze$ ), то выражение для электрохимического эквивалента  $k$  можно записать в виде:

$$k = \frac{m_0}{q_0} = \frac{m_0 N_A}{ze N_A}, \quad (6.3.4)$$

где  $N_A$  – постоянная Авогадро;  $M = m_0 N_A$  – молярная масса вещества.

Величина  $e N_A = F$  называется *постоянной (числом) Фарадея* и является одинаковой для всех веществ величиной:

$$F = e N_A = 96\,485 \text{ Кл/моль.}$$

Постоянная Фарадея численно равна заряду, который необходимо пропустить через электролит для выделения на электроде 1 моля одновалентного вещества.

Закон Фарадея для электролиза приобретает вид:

$$k = \frac{1}{F} \frac{M}{z}. \quad (6.3.5)$$

Формула (6.3.5) является *вторым законом Фарадея*, который формулируется следующим образом: *электрохимический эквивалент вещества пропорционален отношению молярной массы  $M$  вещества к валентности  $z$  его ионов.*

Отношение молярной массы  $M$  вещества к валентности  $z$  его ионов называется *химическим эквивалентом* этих ионов ( $x = M/z$ ). Тогда *второй закон Фарадея* можно сформулировать также следующим образом: *электрохимический эквивалент вещества пропорционален его химическому эквиваленту:  $k = x/F$ .*

Подставив это выражение для  $k$  в (6.3.2), получим обобщенное уравнение закона электролиза:

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{z} It. \quad (6.3.6)$$

Электролиз широко применяется в различных электрохимических производствах. Например, это электролитическое получение металлов

из водных растворов их солей и из расплавленных солей: *гальваностегия, гальванопластика, электрополировка*. Электролитическое получение металлов из водных растворов их солей может быть осуществлено *рафинированием* или *электроэкстракцией*.

*Рафинирование* представляет собой очищение металла от небольшого количества примесей путем электролиза с активным анодом (в качестве анодов в электролитическую ванну помещают металл с примесями, электролитом служит раствор соли очищаемого металла). При электролизе такой анод растворяется, примеси оседают на дно, а на катоде выделяется чистый металл. Рафинированием получают чистые медь, серебро и золото.

*Электроэкстракцией* называется извлечение металла из электролита при неактивном аноде. Электролитом служит водный раствор соли металла, выделяющий кислород на катоде, а на аноде выделяются кислород или хлор. Таким способом получают чистые цинк и никель.

*Электролиз расплавленных солей* проводится с помощью неактивных (угольных) электродов и при высокой температуре, применяется при добывании металлов, реагирующих с водой и поэтому не выделяющихся из водных растворов. Таким путем добывают магний, алюминий, бериллий, литий и другие металлы.

*Гальваностегией* называется покрытие металлических предметов слоем другого металла с помощью электролиза на активном аноде. Таким способом пользуются для покрытия предметов не окисляющимся на воздухе металлом, чтобы предохранить их от коррозии (например, никелирование, хромирование и т. д.). Гальваностегией также пользуются для изготовления украшений (серебрение и золочение).

*Гальванопластикой* называется получение металлических копий с рельефных изображений на каких-либо поверхностях путем электролиза при активном катоде. Гальванопластика имеет большое значение, например, для изготовления клише, применяемых в литографии.

*Электрополировка* заключается в выравнивании металлической поверхности с помощью электролиза. В электролитическую ванну в качестве анода опускается предмет, поверхность которого должна быть отполирована. При электролизе в раствор уходит главным образом вещество с выступающих частей на поверхности анода, т. е. происходит его полировка.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наркевич, И. И. Физика для ВТУЗов / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
2. Наркевич, И. И. Физика для ВТУЗов: в 2 т. / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск: Вышэйшая школа, 1992, 1994. – Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – 1992. – 432 с.; Т. 2: Электричество и магнетизм. Оптика. Строение вещества. – 1994. – 432 с.
3. Курс физики: учеб. пособие для ВТУЗов: в 3 т. / А. А. Детлаф [и др.]. – М.: Высшая школа, 1987, 1989. – 3 т.
4. Детлаф, А. А. Курс физики: учеб. пособие для студентов втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Академия, 2007. – 720 с.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – 3 т.
6. Курс физики: учебник для вузов: в 2 т. / под ред. В. Н. Лозовского. – СПб.: Лань, 2000. – 2 т.
7. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1998. – 542 с.
8. Джанколи, Д. Физика: в 2 т. / Д. Джанколи. – М.: Мир, 1989. – 2 т.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Тема 1. Электрическое поле в вакууме</b> .....	3
Лекция № 1 .....	3
1.1. Электрический заряд. Свойства электрического заряда. Закон сохранения электрического заряда .....	3
1.2. Закон Кулона .....	5
1.3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиции электростатических полей .....	6
Лекция № 2 .....	10
1.4. Поток вектора напряженности электростатического поля .....	10
1.5. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в интегральной форме .....	11
1.6. Примеры применения теоремы Гаусса .....	13
1.7. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в дифференциальной форме .....	17
Лекция № 3 .....	19
1.8. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле .....	19
1.9. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной и дифференциальной формах .....	20
1.10. Потенциал. Разность потенциалов. Принцип суперпозиции для электростатических потенциалов ...	21
1.11. Связь между напряженностью и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности .....	23
<b>Тема 2. Электрическое поле в диэлектриках</b> .....	26
Лекция № 4 .....	26
2.1. Электрический диполь. Электрический момент диполя. Напряженность и потенциал поля диполя .....	26
2.2. Диполь во внешних однородном и неоднородном электростатических полях .....	30
2.3. Энергия диполя во внешнем электростатическом поле	31
2.4. Свободные и связанные заряды в веществе. Типы диэлектриков .....	32
2.5. Поляризация диэлектриков, виды поляризации .....	33

Лекция № 5 .....	36
2.6. Диэлектрическая восприимчивость полярных и неполярных диэлектриков .....	36
2.7. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Вектор электрического смещения .....	37
2.8. Диэлектрическая проницаемость среды .....	40
2.9. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред .....	42
Лекция № 6 .....	46
2.10. Сегнетоэлектрики. Диэлектрический гистерезис. Температура Кюри .....	46
2.11. Эффекты, наблюдаемые в сегнетоэлектриках и других диэлектриках. Применение сегнетоэлектриков в науке и технике .....	49
<b>Тема 3. Электростатическое поле в проводниках</b> .....	53
Лекция № 6 (продолжение) .....	53
3.1. Поле внутри проводника и вблизи его поверхности .....	53
<b>Тема 4. Емкость. Энергия электрического поля</b> .....	56
Лекция № 7 .....	56
4.1. Емкость уединенного проводника и конденсатора .....	56
4.2. Конденсаторы и их соединения .....	57
4.3. Энергия системы зарядов, проводника и конденсатора. Объемная плотность энергии электрического поля .....	63
<b>Тема 5. Постоянный электрический ток</b> .....	66
Лекция № 8 .....	66
5.1. Условия существования и характеристики постоянного электрического тока .....	66
5.2. Законы Ома в интегральной и дифференциальной формах .....	68
5.3. Правила Кирхгофа для расчета электрических цепей .....	74
Лекция № 9 .....	77
5.4. Работа и мощность тока .....	77
5.5. Закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах .....	77

<b>Тема 6. Электрический ток в вакууме и жидкости</b> .....	80
Лекция № 9 (продолжение).....	80
6.1. Эмиссионные явления и их применение .....	80
6.2. Вакуумный диод. Вольт-амперная характеристика вакуумного диода .....	82
6.3. Электрический ток в жидкости. Законы Фарадея для электролиза .....	85
<b>Список использованной и рекомендованной литературы</b> .....	89

Учебное издание

**Бобрович Олег Георгиевич**  
**Тульев Валентин Валентинович**

**ФИЗИКА**  
**В 5-ти частях**  
**Часть 2**  
**Электростатика.**  
**Постоянный электрический ток**

Тексты лекций

Редактор *О. А. Готовчик*  
Компьютерная верстка *Д. В. Чернушевич*  
Корректор *О. А. Готовчик*

Издатель и полиграфическое исполнение:  
УО «Белорусский государственный технологический университет».  
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.  
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.  
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.