

УДК 519.624

**И. Ф. Соловьева**, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)**ВЛИЯНИЕ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ НА РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ  
С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ**

В данной работе рассматриваются двухточечные граничные задачи с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными слоями. Для их решения предлагается метод дифференциальной ортогональной прогонки. Идея метода заключается в переходе от исходной граничной задачи к совокупности трех задач Коши. Две задачи Коши решаются в прямом направлении, а третья задача – в обратном. Для решения задач Коши в настоящее время существует много методов, дающих хорошие результаты. В зонах пограничных слоев вводятся регулирующие множители, нейтрализующие профили пограничных слоев вблизи граничных точек. В работе изучается влияние пограничного слоя на решение граничной задачи с малым параметром при старшей производной. В качестве примера предлагается численное решение задачи с пограничным слоем, которое было получено при использовании пакета Mathcad. Решение задачи представлено в виде графика.

Two points boundary problems with a small parameters multiplying higher derivative and arising therefore boundary layers and considered in this paper. The sweep orthogonal method which allows passing from an initial boundary problem to the set of three Cauchy problems is suggested. A lot of methods to solve Cauchy problems are known now. The influence of a boundary layer on the solution of two-points boundary problems with a small parameter is studied. The numerical solution of a problem with a boundary layer, represented as a graph and having been used a package Mathcad, is considered as an example.

**Введение.** Двухточечные граничные задачи являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов или родственных физических явлений. Диффузионным членом является слагаемое, включающее в себя производные второго порядка, а конвективный член содержит производные первого порядка. Во многих практических задачах коэффициент при производной второго порядка очень мал по сравнению с коэффициентом при производной первого порядка. Примерами таких задач могут служить задачи о переносе тепла с большими числами Пекле, о течениях Навье – Стокса с большими числами Рейнольдса и задачи магнитной гидродинамики с большими числами Хартмана.

Задачи такого рода ставятся на параболических или параболоэллиптических поверхностях и, таким образом, обнаруживают черты дифференциальных уравнений различных типов.

Решения такого рода задач не могут быть представлены в виде рядов по возрастающим степеням коэффициента диффузии. Таким образом, эти задачи не являются регулярными возмущениями соответствующих задач более низкого порядка. Они называются сингулярно-возмущенными задачами.

Решение такого рода задач может быстро меняться вблизи граничных точек, т. е. здесь мы наблюдаем наличие пограничных слоев.

Задачи с пограничными слоями очень сложны в вычислительном отношении, а так как область их применения постоянно расши-

ряется, то интерес к их решению неуклонно возрастает. Нужно не только применить численный метод решения задачи, но и реализовать выбранный алгоритм, используя тот или иной математический пакет. Большие сложности при решении данных задач возникают вблизи граничных точек, т. е. в зонах пограничных слоев, где наблюдается неограниченный рост решения, и особенно градиентов решения.

В настоящее время разработано достаточно много систем компьютерной математики. Выбор системы зависит от поставленной задачи. В предлагаемой работе использовался математический пакет Mathcad [1].

Данный пакет создавался как мощный микрокалькулятор, позволяющий легко справиться с задачами инженерной практики, которые ежедневно встречаются в работе: решение алгебраических или дифференциальных уравнений с постоянными и переменными параметрами, анализ функций, поиск их экстремумов, численное и аналитическое дифференцирование и интегрирование, вывод таблиц и графиков при анализе найденных решений.

Главными достоинствами пакета Mathcad и его колоссальным преимуществом перед другими расчетными средствами является легкость и наглядность программирования задачи, простота использования, возможность создания высококачественных технических отчетов с таблицами, графиков и текстов. Эта система выполняет как численные, так и ана-

литические (символьные) вычисления, имеет удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства графики [1].

**Постановка задачи.** Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром  $\varepsilon > 0$  при старшей производной вида

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку задача (1) имеет слагаемое, содержащее первую производную, то она является задачей с одним пограничным слоем, а задача (2) – задачей с двумя пограничными слоями, так как в ней первая производная отсутствует.

Задачи вида (1), (2) являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов и называются сингулярно возмущенными. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы имеем пограничный слой. Причина трудностей решения задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости данного численного процесса.

Для численного решения граничных задач с пограничным слоем вида (1), (2) предлагается метод дифференциальной ортогональной прогонки с введением в зонах пограничных слоев соответствующих регулирующих поведение решения множителей [2]. Этот метод позволяет применить единый подход к решению граничных задач с одним и двумя пограничными слоями.

**Алгоритм метода дифференциальной ортогональной прогонки.**

1. Рассмотрим граничную задачу вида (2). Представим ее в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.) первого порядка [2]:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{f(x)}{\varepsilon} + \frac{b(x)}{\varepsilon}y_1, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (3)$$

и граничными условиями вида

$$y_1(0) = A; \quad y_2(0) = B. \quad (4)$$

2. Введем в полученную систему о. д. у. (3) множители  $m_2(x, \varepsilon) > 0$ ,  $m_1(x, \varepsilon) > 0$ , регулирующие поведение функций  $y(x)$  и  $y'(x)$ , т. е. самого решения и градиента решения вблизи

пограничных слоев, где, как правило, решение и его градиент быстро растут. При выборе этих множителей нужно учитывать, чтобы произведения  $m_1(x, \varepsilon)y_1(x)$ ,  $m_2(x, \varepsilon)y_2(x)$  были в необходимой мере стабилизированы.

3. Рассмотрим вспомогательную функцию  $Q(x)$  и новые неизвестные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ . Получим выражение для  $y(x)$  и  $y'(x)$ :

$$\begin{aligned} m_1(x, \varepsilon)y_1(x) &= \sin Q(x)u(x) + \cos Q(x)v(x); \\ m_2(x, \varepsilon)y_2(x) &= \cos Q(x)u(x) - \sin Q(x)v(x). \end{aligned} \quad (5)$$

4. Исходную граничную задачу представим в виде совокупности трех соответствующих задач Коши для функций  $Q(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$ , причем для функций  $Q(x)$  и  $u(x)$  применим прямой ход прогонки, а для  $v(x)$  – обратный:

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2'}{2m_2} \sin 2Q - \left( \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} + \frac{m_1}{m_2} \right) \cos^2 Q; \\ Q(0) &= \frac{\pi}{2}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \right) \sin 2Q + \frac{m_2'}{m_2} \cos^2 Q \right] u - \\ &\quad - m_2 \frac{f}{\varepsilon} \cos Q; \\ u(0) &= Am_1(0, \varepsilon); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v' &= \left[ -\frac{m_2'}{m_2} \sin 2Q + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \cos 2Q + 2\frac{m_1}{m_2} \cos^2 Q - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_1}{m_2} \right] u + \left[ \frac{m_2'}{m_2} \sin^2 Q - \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \right) \sin 2Q \right] v + \\ &\quad + m_2 \frac{f}{\varepsilon} \sin Q; \end{aligned} \quad (8)$$

$$v(1) = \frac{1}{\cos Q(1)} [B - \sin Q(1)]u(1), \quad \cos Q(1) = 0.$$

Полученные задачи Коши являются благоприятными в вычислительном отношении. При этом каждая задача Коши вида (6)–(8) решается по формулам известных численных методов, например Рунге – Кутта, а также В-устойчивых и Д-устойчивых методов [3].

Рассмотрим влияние пограничных слоев на решение задачи вида (1).

В задаче (1) «заморозим» коэффициенты, предполагая при этом, что  $a(x) = \text{const}$ ,  $b(x) = \text{const}$ . Предположим при этом, что  $f(x) \equiv 0$ . Тогда общее решение исходной граничной задачи запишется в виде  $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ .

Используя граничные условия задачи, определим неизвестные  $C_1, C_2$ .

$$C_1 = \frac{B - Ae^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}; \quad C_2 = \frac{B - Ae^{\lambda_1}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}.$$

Функцию  $y(x)$  можно представить в таком виде, чтобы в нем явно выделялось влияние величин  $A$  и  $B$ :

$$y(x) = AG_1(x) + BG_2(x),$$

где

$$G_1(x) = \frac{e^{\lambda_1 + \lambda_2 x} - e^{\lambda_2 + \lambda_1 x}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}; \quad G_2(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}.$$

Проанализируем влияние функций  $G_1(x), G_2(x)$  на концах отрезка. Если  $x \rightarrow 0$ , то  $G_1(x) \rightarrow 1$ ; если  $x \rightarrow 1$ , то  $G_1(x) \rightarrow 0$ . Для функции  $G_2(x)$  справедлива обратная картина:  $G_2(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$  и  $G_2(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 1$ .

Графически влияние функций  $G_1(x), G_2(x)$  выглядит следующим образом (рис. 1).

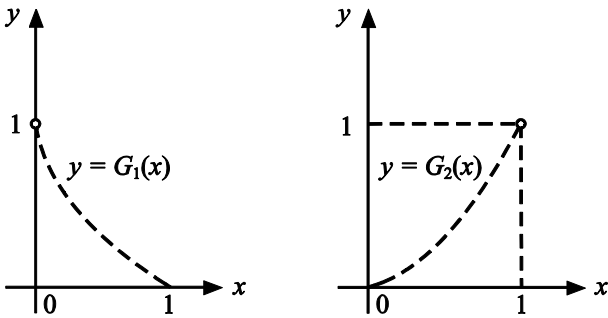


Рис. 1

Обозначим

$$G^{(0)} = A; \quad G^{(1)} = y'(0) = AG_1'(0) + BG_2'(0) = (A(\lambda_2 e^{\lambda_1} - \lambda_1 e^{\lambda_2}) + B(\lambda_1 - \lambda_2)) / (e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}).$$

С учетом обозначений решение граничной задачи предстанет в виде

$$y_1(x) = G^{(0)}H_1(x) + G^{(1)}H_2(x),$$

где

$$H_1(x) = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 x} - \lambda_2 e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2};$$

$$H_2(x) = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Легко заметить, что  $y_1(x) = y(x)$ .

Рассмотрим поведение функций  $H_1(x), H_2(x)$  на концах отрезка  $[0, 1]$ . Если  $x \rightarrow 0$ , то  $H_1(x) \rightarrow 1$ , и если  $x \rightarrow 1$ , то  $H_1(x) \rightarrow M_1$ . Для  $H_2(x)$  справедлива обратная картина:  $H_2(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$  и  $G_2(x) \rightarrow M_2$  при  $x \rightarrow 1$ , где

$$M_2(x) = \frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \gg 1.$$

Схематично представим поведение функций  $H_1(x), H_2(x)$  на рис. 2.

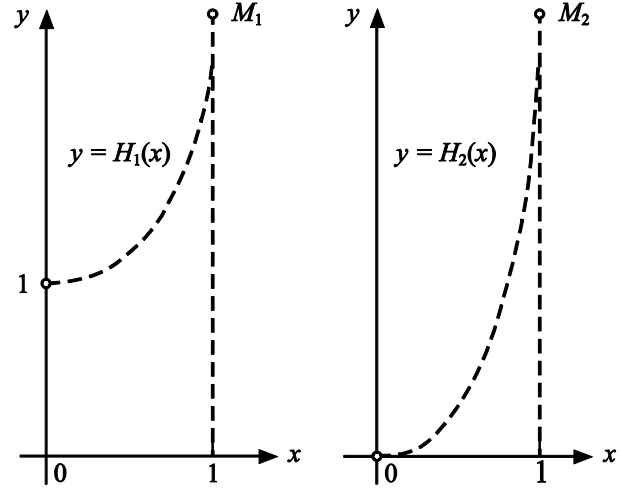


Рис. 2

Таким же образом получается решение граничной задачи и на правом конце отрезка.

Обозначим

$$y(1) = D(1) = B; \quad y'(1) = D(1) = AG_1'(1) + BG_2'(1).$$

Тогда решение граничной задачи с пограничным слоем примет вид

$$y_2(x) = D^{(0)}P_1(x) + D^{(1)}P_2(x),$$

где

$$P_1(x) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2(1-x)} - \lambda_2 e^{-\lambda_1(1-x)}}{\lambda_1 - \lambda_2};$$

$$P_2(x) = \frac{e^{-\lambda_2(1-x)} - e^{-\lambda_1(1-x)}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Легко заметить, что  $y_2(x) = y(x)$ .

Рассмотрим поведение функций  $P_1(x), P_2(x)$  на концах отрезка  $[0, 1]$ .

Если  $x \rightarrow 0$ , то  $P_1(x) \rightarrow K_1$ , где

$$K_1(x) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \gg 1.$$

Если  $x \rightarrow 1$ , то  $P_1(x) \rightarrow 1$ .

Для  $P_2(x)$  справедлива следующая картина:  $P_2(x) \rightarrow K_2$  при  $x \rightarrow 0$ , где

$$K_2(x) = \frac{e^{-\lambda_2} - e^{-\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \gg 1.$$

Схематично проиллюстрируем поведение функций  $P_1(x), P_2(x)$  на графике (рис. 3).

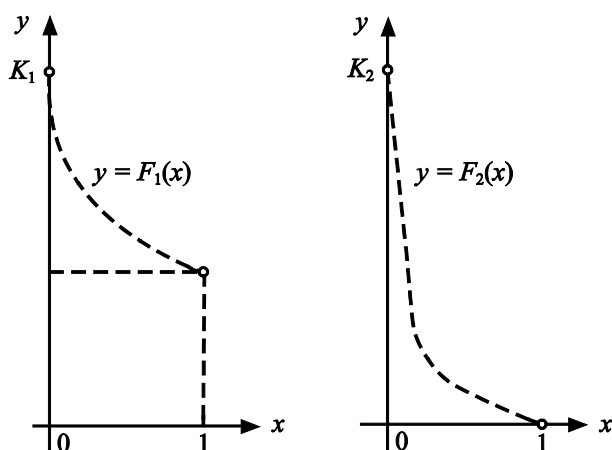


Рис. 3

Рассмотрев все возможности поведения функции на отрезке  $[0, 1]$ , можно заметить, что функции  $P_1(x), P_2(x)$  имеют пограничный слой в точке  $x=0$ . Функции  $G_1(x), G_2(x)$  и  $H_1(x), H_2(x)$  имеют пограничный слой в точке  $x=1$ . При этом изменение производных для этих функций в соответствующих зонах пограничных слоев является равносильным.

Учитывая поведение функций  $H_1(x), H_2(x)$  и  $P_1(x), P_2(x)$ , заметим, что можно указать внутреннюю точку  $x_0 \in (0, 1)$  вблизи точки  $x=0$  и такую внутреннюю точку  $x_0 \in (0, 1)$  вблизи точки  $x_0=1$ , что поведение функций  $H_1(x), H_2(x)$  на интервале  $[0, x_0]$  и функций  $P_1(x), P_2(x)$  на  $(x_1, 1]$  будет благоприятным в том смысле, что на этих отрезках влияние пограничного слоя будет нейтрализовано.

Выявленные здесь закономерности имеют место и в случае линейных граничных задач общего вида, а также нелинейных граничных задач, т. к. они определяются внутренней природой самой задачи.

**Пример.** Рассмотрим граничную задачу с одним пограничным слоем. Решение этой задачи реализовано с помощью пакета Mathcad и представлено в виде графика функции (рис. 4).

$$\varepsilon y''(x) + 2xy'(x) + (1+x^2)y(x) = 0$$

с граничными условиями вида

$$y(-1) = 2; \quad y(1) = 1; \quad \varepsilon = 0,01.$$

На рис. 4 представлено решение граничной задачи с одним пограничным слоем. Оно было получено методом дифференциальной ортого-

нальной прогонки. В граничных точках были введены множители, регулирующие поведение решения и его градиента.

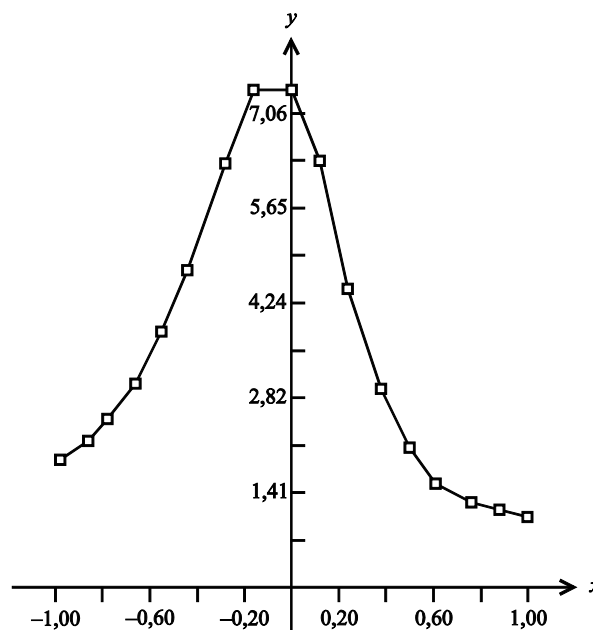


Рис. 4

**Заключение.** Предложенная модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки удобна в реализации и достаточно перспективна для решения граничных задач с одним и двумя пограничными слоями. Она позволяет избежать решения громоздких систем уравнений. Приведение граничной задачи к совокупности задач Коши тоже играет в пользу рассматриваемого метода. Реализация метода с помощью математического пакета Mathcad доступна и удобна в обращении.

#### Литература

1. Макаров, Е. Г. Mathcad. Учебный курс / Е. Г. Макаров. – Питер, 2009. – 384 с.
2. Соловьева, И. Ф. Решение систем линейных о. д. у. второго порядка с различными расположениями пограничных слоев. / И. Ф. Соловьева // Труды БГТУ. – 2012. – № 6. Физ.-мат. науки и информатика. – С. 24–29.
3. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 200 с.

Поступила 28.02.2013