ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

А. А. Якименко, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ

Рассматривается задача модального управления для линейных стационарных динамических систем с запаздывающим аргументом второго порядка с двумя соизмеримыми запаздываниями по состоянию. Показано, что при выполнении определенного условия такая система эквивалентна системе с запаздывающим аргументом нейтрального типа второго порядка с одним запаздыванием по состоянию. Эти системы подробно изучены автором в его диссертационной работе и полученные там результаты распространены на рассматриваемую систему.

The problems of modal control for second order linear time-invariant and time-delay dynamic systems with two commensurate constant delays is considered. It is shown that under certain conditions, such kind of system is equivalent to a second order linear dynamic time-delay system of neutral type with single delay. Such kind of systems are studied in detail by author in his master's thesis.

Введение. Задача модального управления для линейных стационарных систем с одним входом впервые была рассмотрена Ф. М. Кирилловой [1] в 1961 г., для многовходных систем – М. Уонэмом [2] в 1967 г. С тех пор данная задача изучалась многими авторами и для систем без запаздывания теория модального управления близка к своему завершению. Для систем с запаздыванием изучение этой задачи существенно усложняется, что обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. Модальное управление запаздывающими системами исследовалось многими авторами (см., например, [3]–[8]), однако вопросы до сих пор остаются открытыми.

Основная часть. Рассмотрим двумерную линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями вида

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-2h) \\ x_2(t-2h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad (1)$$

где $h > 0$ – постоянное запаздывание. Предполагается, что выполнено условие $c_{12} \neq 0$. В этом случае равенство нулю элемента c_{11} не ограничивает общность системы (1).

Характеристический квазиполином системы (1) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{4-2i} \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h},$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ – числа, зависящие от коэффициентов системы (1), $\alpha_{20} = 1$. Задача модального управления состоит в том, чтобы для любых наперед заданных чисел β_{ij}, где $i = 0, 1, 2$, $j = 0, \ldots, 4 - 2i$, $\beta_{20} = 1$, найти такой линейный регулятор, что система (1), замкнутая этим регулятором, имеет характеристический квазиполином вида

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{4-2i} \beta_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h}.$$

Регулятор будем искать в форме

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^{L} \sum_{j=1}^{N} q'_{ij} x^{(i)}(t - jh) + \int_{-h}^{0} q'(s) x(t+s) ds, \qquad (2)$$

где $q_{ij} \in \mathbb{R}^2$, штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование, L, N $\in \mathbb{N}$, $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]'$, $x^{(i)}(\cdot) \equiv \dfrac{d^i x(\cdot)}{dt^i}$, $x^{(0)}(\cdot) \equiv x(\cdot)$.

Представим регулятор $u(t)$ в (1) в виде

$$u(t) = [-a_{21} \quad -a_{22}] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \\ + [-b_{21} \quad -b_{22}] \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} + \\ + [-c_{21} \quad -c_{22}] \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} + u_1(t).$$

Замыкая этим регулятором систему (1), приходим к системе вида

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-2h) \\ x_2(t-2h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(t). \quad (3)$$

Пусть $b_{11} \neq 0$. Тогда сделаем в системе (3) замену переменных $x = T_1(m) y$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{c_{12}}{b_{11}} m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

где m – оператор сдвига ($m\ y_i(t) \equiv y_i(t-h)$, $i = 1, 2$).

С новыми переменными система (3) перепишется в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} b_{11} & \frac{b_{11}b_{12} - a_{11}c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t-h) \\ y_2(t-h) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \frac{c_{12}}{b_{11}} u_1(t-h) \\ u_1(t) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В операторной форме система (4) примет вид

$$\lambda \begin{bmatrix} Y_1(\lambda) \\ Y_2(\lambda) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + m \begin{bmatrix} b_{11} & \frac{b_{11}b_{12} - a_{11}c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Y_1(\lambda) \\ Y_2(\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \frac{c_{12}}{b_{11}} \\ 1 \end{bmatrix} U_1(\lambda), \quad (5)$$

где λ – оператор дифференцирования, $Y_1(\lambda)$, $Y_2(\lambda)$, $U_1(\lambda)$ – изображения по Лапласу функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $u_1(t)$ соответственно; m – оператор сдвига. Умножим обе части системы (5) слева на невырожденную для всех $m \in \mathbb{C}$ матрицу:

$$T_2(m) = \begin{bmatrix} 1 & m \frac{c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда система (5) примет вид

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & -m \frac{c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(\lambda) \\ Y_2(\lambda) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + m \begin{bmatrix} b_{11} & \frac{b_{11}b_{12} - a_{11}c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Y_1(\lambda) \\ Y_2(\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_1(\lambda).$$

Последнюю систему перепишем в виде

$$\lambda \begin{bmatrix} Y_1(\lambda) \\ Y_2(\lambda) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + m \begin{bmatrix} b_{11} & \frac{b_{11}b_{12} - a_{11}c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + m\lambda \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Y_1(\lambda) \\ Y_2(\lambda) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_1(\lambda).$$

Получившаяся система в пространстве состояний есть система с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним запаздыванием вида

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} b_{11} & \frac{b_{11}b_{12} - a_{11}c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t-h) \\ y_2(t-h) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t-h) \\ \dot{y}_2(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(t). \quad (6)$$

Вопрос модальной управляемости для системы (6) подробно исследован в диссертационной работе автора [9]. Система (6) соответствует общециклическому случаю. Приведем условия модальной управляемости.

Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$ – корни уравнения

$$\lambda^2 + \frac{b_{11}b_{12} - 2a_{11}c_{12}}{c_{12}}\lambda + \frac{a_{12}b_{11}^2 - a_{11}b_{11}b_{12} - a_{11}^2 c_{12}}{c_{12}} = 0.$$

Задача модального управления для системы (6) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\delta(\xi_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \tag{7}$$

где $\delta(\xi_i) = a_{11} + b_{11}e^{-\xi_i h} - \xi_i,\ i = 1, 2.$ В зависимости от того, равны ли между собой ξ_1 и ξ_2 или нет, построены регуляторы вида (2), решающие задачу модального управления для системы (6), с коэффициентами в виде элементарных функций параметров системы (6). Пусть

$$u_1(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} q_1(\cdot) & q_2(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} -$$

регулятор, решающий задачу модального управления для системы (6), где $q_1(\cdot), q_2(\cdot)$ – соответствующие операторы. Тогда, поскольку

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{c_{12}}{b_{11}}m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{b_{11}}m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Регулятор

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} q_1(\cdot) & q_2(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{b_{11}}m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

решает задачу модального управления для системы (3), а регулятор

$$u(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -c_{21} & -c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} q_1(\cdot) & q_2(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{b_{11}}m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

решает задачу модального управления для системы (1).

Таким образом доказана *теорема.* Для того чтобы система (1) в случае $c_{12} \neq 0, b_{11} \neq 0$ была модально управляема регулятором вида (2), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (7). При этом регулятор, решающий задачу модального управления, имеет вид (8).

Замечание. Предложенный метод построения регуляторов для решения задачи модального управления ставит достаточно жесткие условия на начальные данные задачи (1), поскольку в регуляторе участвуют производные вплоть до третьего порядка от функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Однако искомые регуляторы получаются в явном виде как элементарные функции параметров системы (1), что при достаточной гладкости начальных условий позволяет их использовать.

Если задача модального управления разрешима, то полученные регуляторы можно применить для решения, например, задачи стабилизации. Эта задача заключается в нахождении такого регулятора вида (2), чтобы замкнутая этим регулятором система (1) имела все собственные числа с отрицательными действительными частями. Приведем для системы (1) пример регулятора, который ее стабилизирует.

Пример 1. Пусть для параметров системы (6) выполнены условия:

$$\frac{b_{11}b_{12} - 2a_{11}c_{12}}{c_{12}} > 0;$$

$$\frac{a_{12}b_{11}^2 - a_{11}b_{11}b_{12} - a_{11}^2 c_{12}}{c_{12}} > 0. \tag{9}$$

Замкнем систему (6) регулятором

$$u_1(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} -\frac{b_{11}^2}{c_{12}} & \frac{a_{11}c_{12} - b_{11}b_2}{c_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда характеристическое уравнение замкнутой этим регулятором системы (6) имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}e^{-\lambda h} - \lambda & a_{12} + \frac{b_{11}b_{12} - a_{11}c_{12}}{c_{12}}e^{-\lambda h} + \frac{c_{12}}{b_{11}}\lambda e^{-\lambda h} \\ -\frac{b_{11}^2}{c_{12}} & \frac{a_{11}c_{12} - b_{11}b_{12}}{c_{12}} - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + \frac{b_{11}b_{12} - 2a_{11}c_{12}}{c_{12}}\lambda + \frac{a_{12}b_{11}^2 - a_{11}b_{11}b_{12} - a_{11}^2 c_{12}}{c_{12}}.$$

Очевидно, что при выполнении условий (8) последний многочлен будет устойчивым, т. е.

будет иметь два корня с отрицательными действительными частями. Тогда, возвращаясь к системе (1), стабилизирующий регулятор будет иметь вид

$$u(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -c_{21} & -c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{b_{11}^2}{c_{12}} & \frac{a_{11}c_{12} - b_{11}b_2}{c_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{b_{11}} m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что построенный регулятор не имеет производных функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, то есть он не выводит систему (1) из класса запаздывающих систем.

Приведем еще один пример решения задачи стабилизации для системы (1).

Пример 2. Пусть выполнено одно из условий:

1) $-a_{11} > |b_{11}|$;

2) $-b_{11} > |a_{11}|,\ h < h^*,$ (10)

где значение h^* может быть вычислено по формуле

$$h^* = \sqrt{\frac{1}{b_{11}^2 - a_{11}^2}} \arccos\left(-\frac{a_{11}}{b_{11}}\right).$$

В работе [9] показано, что при выполнении одного из условий (10) квазиполином

$$a_{11} + b_{11}e^{-\lambda h} - \lambda$$

имеет корни $\lambda_k \in \mathbb{C}$, у которых $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$. В качестве регулятора $u(t)$ в системе (1) возьмем регулятор

$$u(t) = u(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -c_{21} & -c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{b_{11}} m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Замкнутая этим регулятором система (1) примет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-2h) \\ x_2(t-2h) \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение данной замкнутой системы будет следующим:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}e^{-\lambda h} - \lambda & a_{12} + b_{12}e^{-\lambda h} + c_{12}e^{-2\lambda h} \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv -\left(a_{11} + b_{11}e^{-\lambda h} - \lambda\right)(\lambda + 1) = 0.$$

При выполнении одного из условий (10) очевидно, что характеристическое уравнение имеет все корни с отрицательными действительными частями, то есть устойчиво. Задача стабилизации решена, причем указано предельное запаздывание, при котором в случае выполнения условия (2) работает построенный регулятор.

Заключение. В данной работе предложен метод построения линейных регуляторов вида (2), которые решают задачу модального управления для системы (1). При этом система (1) с двумя кратными запаздываниями при помощи невырожденных преобразований сводится к системе с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним запаздыванием вида (6). Исчерпывающие результаты для такой системы были получены в диссертационной работе автора [9]. И хотя предложенные там регуляторы выводят систему (1) из класса запаздывающих систем, при достаточной гладкости начальных условий удается решить задачу модального управления. При этом регуляторы получаются в явном виде и являются элементарными функциями параметров системы (1).

Литература

1. Кириллова, Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов / Ф. М. Кириллова // Прикл. мат. и мех. – 1961. – № 3. – С. 433–439.

2. Wonham, W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems / W. M. Wonham // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1967. – Vol. AC-12, No. 6. – P. 660–665.

3. Марченко, В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыва-

нием / В. М. Марченко // Докл. АН БССР. – 1978. – № 5. – С. 401–404.

4. Асмыкович, И. К. К теории модального управления систем с запаздыванием / И. К. Асмыкович, В. М. Марченко // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С. 200–206.

5. Задачи управления конечномерными системами / И. К. Асмыкович [и др.] // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 11. – С. 5–29.

6. Марченко, В. М. Модальное управление в системах с последействием / В. М. Марченко //АиТ. – 1988. – № 11. – С. 73–83.

7. Марченко, В. М. О модальном управлении многовходных систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа / В. М. Марченко, А. А. Якименко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 11. – С. 1534–1543.

8. Марченко, В. М. Модальное управление в системах с распределенным запаздыванием нейтрального типа / В. М. Марченко, А. А. Якименко // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 5. – С. 45–51.

9. Якименко, А. А. Управление динамическими системами с запаздывающим аргументом нейтрального типа воздействием линейной обратной связи: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / А. А. Якименко. – Минск, 2008. – 113 л.

Поступила 09.03.2013